<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Lycée Joliot Curie à 7</td><td>PHYSIQUE – Thème 3</td><td>Classe de 1ère Enseignement φχ</td></tr>
<tr><td colspan="3">COURS n°2
« Je cherche les notes qui s'aiment … »</td></tr>
</table>

Wolfgang Amadeus Mozart, connu pour ses talents de musicien, a dit un jour « Je cherche les notes qui s'aiment »
De nombreux musiciens sont capables à l'oreille de jouer des notes qui « vont bien ensemble » : c'est le principe des gammes

Pythagore de Samos, plus connu pour ses talents de mathématicien que de musicien, proposa un moyen mathématique de déterminer des ensembles de notes qui « vont bien ensemble » : On parle de ..gamme..de..pythagore

I- Quelles sont les conditions pour obtenir des notes qui s'aiment ?

Deux notes consonantes ou dissonantes : Une question d'intervalle !

Rappels du chapitre précédent

- En musique, une note est caractérisée par sa .hauteur…, c'est-à-dire sa .fréquence
Par exemple la note La_3 correspond à une fréquence de f_{La3} = …440 Hz et la note Do_3 à une fréquence de 262 Hz.
- Le La_4 étant un La à l'octave supérieur par rapport au La_3 a une fréquence $f_{La4} = 2 f_{La3}$
A chaque fois que l'on change d'octave, la fréquence d'une note est multipliée par 2
- Une guitare et un piano jouant une même note émettent un son dont :
  - La fréquence du fondamental est .la..même.. : f_{1-gui} f_{1-pia}
  - Les harmoniques sont aux .mêmes… fréquences mais pas à la même intensité définissant le timbre avec $f_n = n \times f_1$ pour l'harmonique du rang n

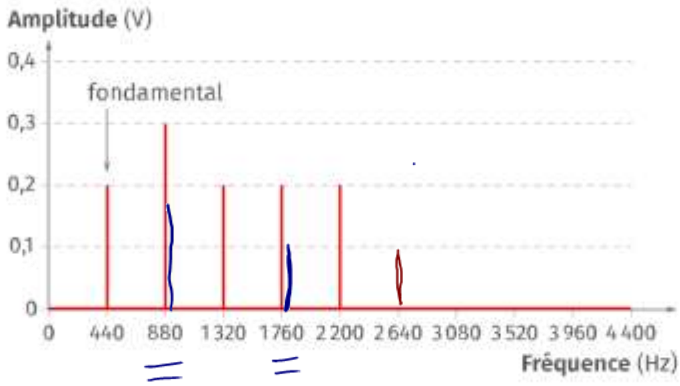
Que sont des notes qui s'aiment ?

Plus les harmoniques de deux notes ont des fréquences communes, plus ces notes sont consonantes à l'oreille (agréable à entendre). Elles sont dites consonantes (opposées à dissonantes)

1er exemple : Jouons un La_3 et un La_4. Il semble évident que le son de ces 2 notes, jouées ensemble, sera consonant.
Vérifions en complétant le spectre en fréquence du La_3 avec le spectre du La_4 en bleu

La3 :
f_1 = 440 Hz / $f_2 = 2f_1$ = 880 Hz
$f_3 = 3f_1$ = 1320 Hz $f_4 = 4f_1$ = 1760 Hz
$f_5 = 5f_1$ = 2200 Hz $f_6 = 6f_1$ = 2640 Hz

La4 :
$f'_1 = 2f_1$… = .880… Hz / $f'_2 = 2f'_1$ = 1760 Hz
$f'_3 = 3f'_1$ = 5280 Hz
$f'_4 = 4f'_1$ =
$f'_5 = 5f'_1$
$f'_6 = 6f'_1$ =



Conclusion : …les notes La3 et La4 sont consonantes car elles ont en commun des harmoniques……

-2ème exemple : Jouons Un Do3 de hauteur f_{1Do} = 261,626 Hz et un Sol3 de hauteur f_{1Sol} = 391,9952 Hz
En vous aidant du fichier Excel « Tableau.xls » téléchargeable sur capneuronal, complétez le tableau suivant :

	Fondamental	Harmoniques							
Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Do3	261,626	523	785	1047	1308	1570	1831	2093	2355
Sol3	391,9952	784	1176	1568	1960	2352	2744	3136	3528

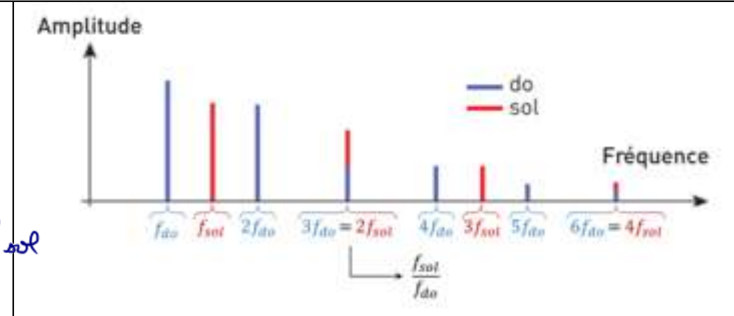
Conclure sur la consonance ou la dissonance de ces 2 notes :

La fréquence de l'harmonique de rang 2 du Do 3 est égale à celle de l'harmonique de rang 3 du sol 3

$f_2(Do) = 2 f_{Do}$

$f_3(sol) = 3 f_{sol}$

$\Rightarrow 2 f_{Do} = 3 f_{sol}$



Remarque : Sur le 3ème harmonique et le 7ème harmonique, exprimez le rapport $\frac{f_{Do}}{f_{Sol}}$

$2 f_{Do} = 3 f_{sol}$

$\Rightarrow \frac{f_{Do}}{f_{sol}} = \frac{3}{2} = 1,5$

Le rapport des fréquences est égal à 3/2

On parlera **d'harmonie entre deux notes lorsque le rapport des fréquences de leur fondamental est « simple ».**

$$Intervalle = \frac{f_{1\cdot note2}}{f_{1-note1}} \quad \text{avec toujours } f_{1-note2} > f_{1-note1}$$

Le **rapport le plus simple est celui qui a pour valeur 2. Les deux notes sont dites** à l'octave. Jouées simultanément, ces deux notes semblent n'en faire qu'une.

Exemple entre le La_3 et le La_4

$$Intervalle = \frac{f_{La4}}{f_{La3}} = \frac{880}{440} = 2$$

Il existe d'autres rapports simples représentés dans le tableau ci-contre.

Exemple : le rapport de la fréquence du fondamental de sol3 dont la fréquence du fondamental est $f_{1-Sol3} = 393$ Hz sur celle du fondamental du Do3 dont la fréquence du fondamental est $f_{1-Do3} = 262$ Hz est égal à

$$Intervalle = \frac{f_{1-Sol3}}{f_{1-Do3}} = \frac{393}{262} = \frac{3}{2}$$

Rapport des fréquences fondamentales	Position par rapport à la note de référence	Nom	Exemple
$\frac{2}{1}$	8	Octave	Do – Do
$\frac{3}{2}$	5	Quinte	Do – Sol
$\frac{4}{3}$	4	Quarte	Do – Fa
$\frac{5}{4}$	3	Tierce majeure	Do – Mi

Quelques accords harmonieux.

Le Sol3 est dit à la quinte...... (montante) du Do3.

Deux notes à la quinte se distinguent mieux, se fondent moins, que deux notes à l'octave, car elles ont moins d'harmoniques en commun.

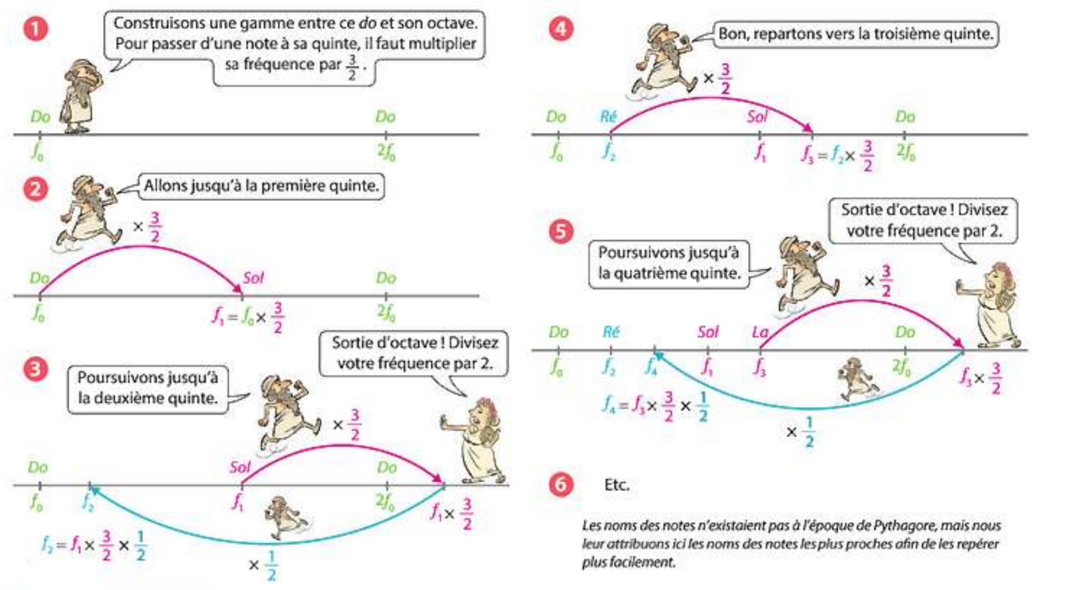
Autres intervalles possibles pour obtenir des notes consonantes

Exemple : Dans une chorale mixte qui chante la même ligne musicale, le résultat est harmonieux car hommes et femmes chantent « à l'octave » les uns des autres mais peuvent chanter à la quinte où à la tierce.

II- Comment construire une gamme de notes : C'est-à-dire un ensemble de notes consonantes

1- Les gammes de Pythagore :

- Une gamme est un ensemble de notes réparties sur une ..octave....
- Les gammes de Pythagore sont basées sur le cycle des ..quintes.
- La méthode est la suivante :

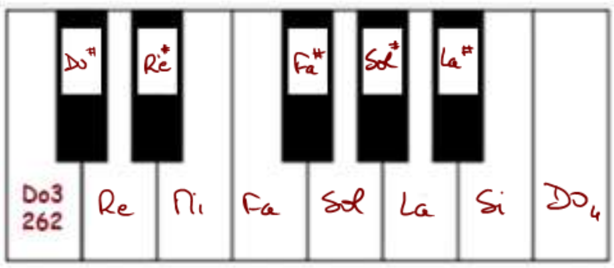


2- Construire la gamme de Do3 selon Pythagore:

- Compléter, en calculant toutes les fréquences et en respectant la méthode précédente, le tableau « Gamme de Pythagore construite à partir du Do3 » sous Excel
- En déduire l'ensemble des notes constituant la gamme du Do3 (Vous disposez d'un tableau fréquence-note)

Note	Do3	Sol	Ré	La	Mi	Si	Fa#	Do#	Sol#	Ré#	La#	Fa	Do4
Octave 3	262	393	295	442	332	497	373	280	420	315	472	354	546

Réécrire les notes et les fréquences sur l'octave d'un piano



Remarque importante entre les fréquences du Do3 et du Do4 calculées :

3- La quinte du loup ?

Si l'on calcule la fréquence du D04 en appliquant le cycle des quintes, on trouve

$f_{1-Do4} = \frac{3}{2} \times 353,6 = 530,4\ Hz$

Or f_{1-Do4} devrait être égale à $f_{1-Do4} = 2 f_{Do3} = 2 \times 261,6\ Hz$
$= 523,2\ Hz$

Cette différence s'entend lorsque l'on joue ces 2 notes aux fréquences calculées par la méthode de Pythagore faisant penser au cri du Loup

Retrouvons par les calculs cette différence :

Point mathématique : Puissances et racines

$- a^m \times a^n = a^{m+n}$;
$- (a^m)^n = a^{m\times n}$;
$- \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
$- (ab)^n = a^n \times b^n$;
$- (\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$.

1. Le résultat de $\frac{\cancel{3}}{2} \times \frac{7}{\cancel{3}}$ est : $= \frac{\cancel{3}\times 7}{2\times\cancel{3}} = \frac{7}{2}$

a) $\frac{23}{6}$ b) $\frac{7}{2}$ c) $\frac{14}{9}$? Justifier.

2. Le résultat de $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}$ est : $= \frac{3^2 \times 1}{2^2 \times 2} = \frac{9}{8}$

a) $\frac{3^2}{2^3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{9}{8}$? Justifier

3. Quel est le résultat de $\frac{a^n}{b^p} \times \frac{a^2}{b}$? $= \frac{a^n \times a^2}{b^p \times b} = \frac{a^{n+2}}{b^{p+1}}$

4. Par quelle puissance doit-on multiplier 2^2 pour retrouver 2 ? $\sqrt{x} = x^{1/2}$

Compléter $(2^2)^{1/2} = 2$

5. Comment écrire avec des puissances $\sqrt[3]{x}$? $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$\times 2$

Note	Do3	Sol	Ré	La	Mi	Si	Fa#	Do#	Sol#	Ré#	La#	Fa	Do4
Octave 3	262	393	295	442	332	497	373	280	420	315	472	354	546

$\times 3/2$; $\times 3/2 \times \frac{1}{2}$; $\times 3/2$; $\times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}$; $\times \frac{3}{2}$; $\times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}$; $\times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}$; $\times 3/2$; $\times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}$; $\times \frac{3}{2}$; $\times 3/2 \times \frac{1}{2}$; $\times 3/2$

Changement d'octave

$f_{DO_4} = 2 f_{DO_3} = 2 \times 262 = 524 \, Hz$

Avec le cycle des quintes

$f_{DO_4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times f_{DO_3}$

$= 2{,}027 \times f_{DO_3} =$

$= 2{,}027 \times 262 = 531 \, Hz$

$\Rightarrow$ Différence : le cycle des quintes ne permet pas d'obtenir exactement la bonne valeur.

Bilan :

Une **gamme naturelle** est une suite de notes « sautant » de quinte en quinte (**cycle des quintes**). Si la nouvelle note n'est plus dans l'octave de la gamme, on la ramène simplement dedans en divisant sa fréquence fondamentale par 2 (saut d'une octave), ou 4 (2^2, saut de 2 octaves), etc.

En procédant ainsi, on se trouve assez près de l'octave au bout de 12 quintes. Mais il n'est pas possible de retomber exactement sur l'octave, il faut pour cela raccourcir la dernière quinte du cycle. Comme son rapport de fréquences ne vaut donc plus exactement 3/2, elle sonne faux.

On dit que le cycle des quintes est infini.

La gamme chromatique, ou gamme de Pythagore, est l'ensemble des douze notes du cycle des quintes normalisées. Elle comporte sept notes principales et cinq notes dièse (#).

3- Les gammes tempérées: dans ce monde de brute !

Pour régler le problème de la dernière quinte fausse, on met au point la **gamme tempérée**.
Si l'on veut une gamme à 12 notes à partir de la note de départ de fréquence fondamentale f_0, on divise l'octave de f_0 en 12 intervalles égaux de rapport r.
Le rapport entre deux notes successives a toujours la même valeur, notée r. C'est un nombre irrationnel (qui ne peut être mis sous la forme d'un rapport entre deux nombres entiers).

1. Quel doit être le rapport entre la fréquence du premier do l'octave (f_0) et la fréquence (f_{12}) du premier do de l'octave suivant ?

$\frac{f_{12}}{f_0} = 2$ (octave) $\Rightarrow f_{12} = 2 \times f_0$

2. Quel est le lien entre ces 2 fréquences et r ? Pour passer d'une note à la suivante $\times r$

$\Rightarrow \underbrace{r \times r \times \dots r}_{12 \text{ fois}} = r^{12}$ donc $f_{12} = r^{12} \times f_0$

3. En comparant ces deux expressions, quelle relation peut-on écrire ?

on a donc $f_{12} = 2 \times f_2 = r^{12} \times f_0 \Rightarrow r^{12} = 2$

4. Quelle est la solution positive de l'équation $x^2 = 2$?

$\sqrt[2]{x^2} = \sqrt[2]{2} \Leftrightarrow (x^2)^{1/2} = \sqrt[2]{2}$

5. Comment écrire alors la solution de l'équation $r^{12} = 2$? $r^{12} = 2$

donc $(r^{12})^{1/12} = 2^{1/12} \Rightarrow r = 2^{1/12}$ ou $r = \sqrt[12]{2}$

Bilan :
La **gamme tempérée** est construite en partageant l'octave en 12 intervalles dont le rapport de fréquence est égal à la racine douzième de 2

Tous les intervalles entre deux notes successives sont égaux mais toutes les quintes sont légèrement fausses.