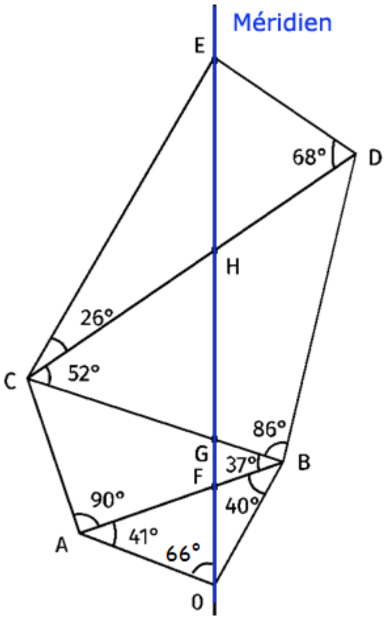
Lycée Joliot Curie à 7	***Thème 2***	Classe de 1ère Enseignement φχ

Thème « La Terre, un astre singulier »
Partie I « La rotondité de la Terre »

Document 6 : la méthode de triangulation
La méthode consiste à mesurer précisément une base AB.
La base est alors l'origine d'une opération de triangulation.
À partir des extrémités A et B de cette base, Delambre et Méchain visent un point O éloigné et mesurent les angles $\widehat{BAO}$ et $\widehat{OBA}$. Ils en déduisent la distance BO en utilisant les relations du triangle. Celle-ci constitue alors la base d'un nouveau triangle dont le sommet est D.

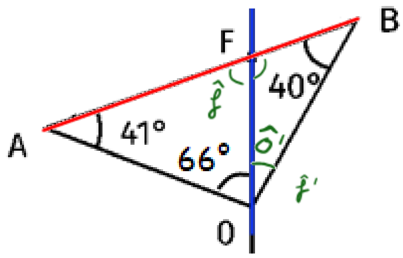
Travaux pratiques :
Mesure d'une portion de méridien.



6. Sur le schéma, sachant que l'on connaît la distance AB = 11 km, que les angles déterminés par triangulation sont indiqués et les angles manquants à mesurer avec un rapporteur, calculez la longueur OE représentant une portion de méridien.

A vos calculatrices.

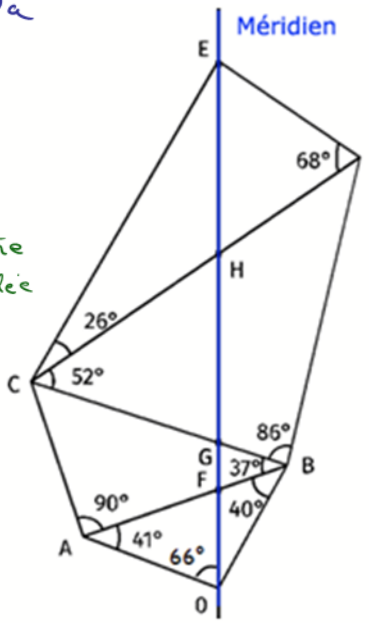
Première étape du raisonnement :
Déterminez la distance FO à partir du schéma ci-contre.
En déduire ensuite la distance OE



Coup de pouce pour la première étape :
- Calculer les angles $\widehat{AFO}$, $\widehat{OFB}$, $\widehat{FOB}$ et $\widehat{AOB}$
- En déduire les distances OB, FB puis FO

Dans le triangle (AFO), on peut écrire
$\hat{f} + \hat{a} + \widehat{AOF} = 180°$
$\Rightarrow \hat{f} = 180° - \widehat{AOF} - \hat{a} = 180° - 66° - 41° = 73°$
on en déduit $\hat{f}'$
$\hat{f} + \hat{f}' = 180°$ (angle complementaire)
$\Rightarrow \hat{f}' = 180° - \hat{f} = 180° - 73° = 107°$
Dans le triangle (OFB) on peut en déduire $\hat{o}'$
$\hat{o}' + \hat{f}' + \hat{b} = 180°$
$\Rightarrow \hat{o}' = 180° - \hat{f}' - \hat{b} = 180° - 107° - 40° = 33°$
et donc $\hat{o} = \widehat{AOB} = 66° + 33° = 99°$

Dans le triangle (AOB), il est possible, en appliquant la loi des sinus, de déterminer la distance [OB]



$$\frac{AB}{\sin \hat{o}} = \frac{OB}{\sin \hat{a}} \qquad \frac{\text{côté}}{\sin(\text{angle opposé au côté})}$$

$$\Rightarrow OB = \frac{AB \times \sin \hat{a}}{\sin \hat{o}} = \frac{11 \times \sin 41°}{\sin 99°}$$

Vérifiez que votre machine est réglée en degré

$$\Rightarrow OB = 7{,}3 \text{ km}$$

Dans le triangle (OFB), on peut maintenant calculer [OF]

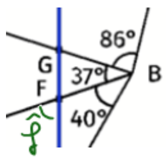
$$\frac{OF}{\sin \hat{b}} = \frac{OB}{\sin \hat{f}'} \Rightarrow OF = \frac{OB \sin \hat{b}}{\sin \hat{f}'} = \frac{7{,}4 \times \sin 40°}{\sin 107°}$$

$$OF = 4{,}9 \text{ km}$$

OUF, on a trouvé 1 longueur. Il en reste 3 !

Recherche de FG

Dans le triangle (GFB) il manque 2 angles et une longueur



Etape 1 : recherche des angles

- $\hat{f}$ et $\widehat{GFB}$ sont

donc $\widehat{GFB} = \hat{f} = 73°$

On en déduit $\hat{g} = \widehat{FGB}$

$$\hat{g} + \widehat{GFB} + \hat{b}' = 180°$$

$$\Rightarrow \hat{g} = 180 - \widehat{GFB} - \hat{b}'$$

$$= 180° - 73° - 37° = 70°$$

Etape 2 : La seule longueur que l'on peut trouver est [FB] à partir du triangle (OFB)

On a $\dfrac{FB}{\sin \hat{o}'} = \dfrac{OB}{\sin \hat{f}'}$

$$\Rightarrow FB = \frac{OB \sin \hat{o}'}{\sin \hat{f}'} = \frac{7{,}3 \times \sin 33°}{\sin 107°}$$

$$= 4{,}2 \text{ km}$$

Donc a

$$\frac{FG}{\sin \hat{b}'} = \frac{FB}{\sin \hat{g}} \Rightarrow FG = \frac{FB \times \sin \hat{b}'}{\sin \hat{g}}$$

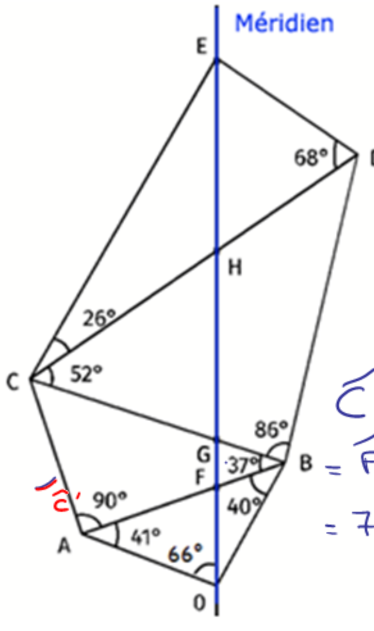
$$\Rightarrow FG = \frac{4{,}2 \times \sin 37°}{\sin 70}$$

$$\Rightarrow FG = 2{,}7 \text{ km}$$

Méthode :

Dans 1 triangle, il faut connaître :

- un côté
- au moins 3 angles



$\widehat{CGH} = \widehat{FGB} = 70°$

Recherche de la longueur GH

Des calculs précédents, on connait

- $AB = 11$ km
- $\widehat{FGB} = \hat{g} = 70°$

Nous pouvons trouver $\hat{c}' = 180° - 90° - 37°$ dans le triangle (ABC) $\hat{c}' = 53°$

Cet angle nous permet de trouver BC

$$\frac{BC}{\sin \hat{a}'} = \frac{AB}{\sin \hat{c}'} \Rightarrow BC = \frac{AB \sin \hat{a}'}{\sin \hat{c}'} = \frac{11 \times \sin 90°}{\sin 53°} = 13{,}8 \text{ km}$$

Calculons maintenant BG afin de trouver CG

Dans le triangle FGB

$\widehat{GBF} = 37°$ et $\widehat{GFB} = \hat{f} = 73°$

donc $\dfrac{BG}{\sin \hat{f}} = \dfrac{FG}{\sin(\widehat{GBF})} \Rightarrow BG = \dfrac{FG \times \sin \hat{f}}{\sin(\widehat{GBF})} = \dfrac{2{,}7 \sin 73°}{\sin 37°}$

$\Rightarrow BG = 3{,}8$ km

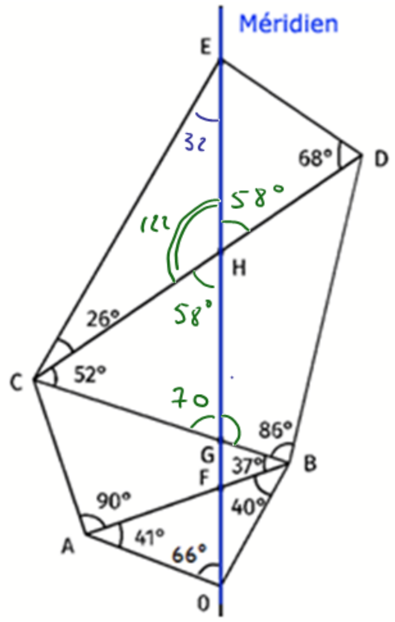
Donc $CG = BC - BC = 13{,}8 - 3{,}8 = 10$ km.

Dans le triangle CGH, il ne nous manque plus que les angles

$\widehat{CGH} = \widehat{FGB} = 70°$ $\Rightarrow \widehat{CHG} = 180° - 52 - 70 = 58°$

Donc $\dfrac{HG}{\sin 52} = \dfrac{CG}{\sin 58°} \Rightarrow HG = \dfrac{CG \times \sin 52°}{\sin 58°} = \dfrac{10 \times \sin 52°}{\sin 58°}$

$HG = 9{,}3$ km



On détermine de la même façon HE

$CG = 10$ km $\Rightarrow CH = \dfrac{CG \times \sin 70}{\sin 58} = 11{,}1$ km

$\widehat{CEH} = 180 - 26 - 122 = 32°$

$\Rightarrow HE = \dfrac{CH \times \sin 26°}{\sin 32°} = 9{,}2$ km

$\Rightarrow OE = OF + FG + GH + HE$

$= 4{,}9 + 2{,}7 + 9{,}3 + 9{,}2 = 26{,}1$ km

OUF