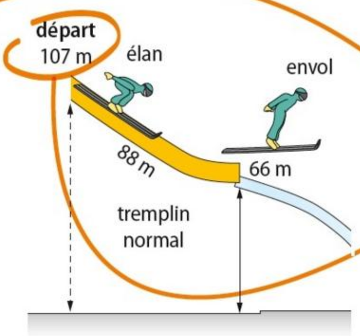
Exercice : skateuse

Chapitre 11« Aspects énergétiques des phénomènes mécaniques »

23 Saut à ski

Un sauteur à ski se laisse glisser sans vitesse initiale depuis le sommet d'un tremplin. On assimile le système skieur à un point matériel. On néglige l'action de l'air et les frottements de la piste. La réaction $\vec{R}$ qui modélise l'action du tremplin sur le système est perpendiculaire à la piste.



Données :
$g = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$; masse du skieur : $m = 75$ kg.

1. Exprimer puis calculer le travail des forces modélisant les actions mécaniques s'exerçant sur le système depuis le haut du tremplin jusqu'au point d'envol. Commenter leurs signes.

2. Énoncer puis appliquer le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer la vitesse du skieur au bas du tremplin avant son envol.

LES CLÉS DE L'ÉNONCÉ

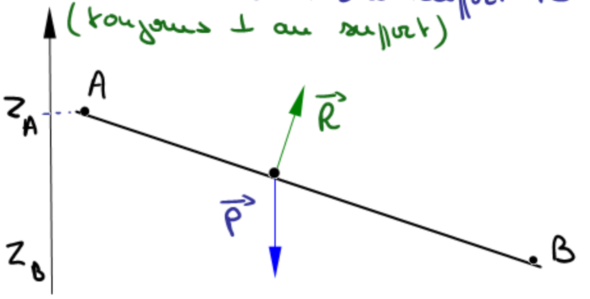
- Certaines **actions mécaniques** ne sont pas à prendre en compte.
- Le schéma renseigne sur les **altitudes** en haut et en bas du tremplin.

LES QUESTIONS À LA LOUPE

- **Exprimer :** donner une relation littérale reliant les grandeurs physiques.
- **Énoncer :** réciter le théorème dans son intégralité.

1) Bilan des forces en négligeant l'action de l'air et les frottements

- le poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- la réaction du support $\vec{R}$ (toujours ⊥ au support)



Expression des travaux sur le trajet AB

$W_{AB}(\vec{R})$ travail de la force $\vec{R}$ sur le trajet AB

$W_{AB}(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{AB}$
$= R \times AB \times \cos(\widehat{\vec{R};\vec{AB}})$

or $\vec{R}$ et $\vec{AB}$ sont 2 vecteurs orthogonaux

$\Rightarrow \cos(\widehat{\vec{R};\vec{AB}}) = \cos 90 = 0$

$\Rightarrow W_{AB}(\vec{R}) = 0$ J cette force $\vec{R}$ ne travaille pas, elle n'a pas d'effet sur le mouvement.

$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AB}$ Démonstration du cours à savoir refaire

$= mg(z_A - z_B)$ le trajet a lieu du point A vers B

$= 75 \times 9{,}81 \times (107 - 66)$

$= 3{,}0.10^4$ J

Le travail du poids est positif. Il est donc moteur. $\vec{P}$ est à l'origine du mouvement.

2. Théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique ΔE_c est égale à la somme des travaux des forces s'exerçant sur le skieur.

$\Delta E_c = \Sigma W_{AB}(\vec{F})$

Entre les points A et B

$E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R})$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = mg(z_A - z_B) + 0$

=

avec $V_A = 0\ m/s$ " Sans vitesse initiale"

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}V_B^2 = \cancel{m}g(z_A - z_B)$$

$$\Rightarrow V_B^2 = 2g(z_A - z_B)$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)}$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{2 \times 9{,}81\,(107 - 66)}$$

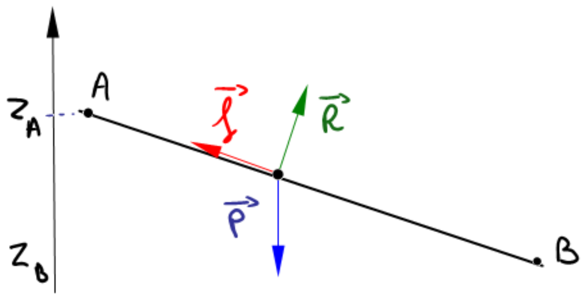
$$= 28\ m/s$$

Poursuivons l'exercice !

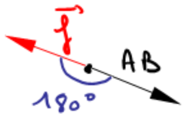
En fait la vitesse du skieur au point B est $V'_B = 21\ m/s$

Ceci s'explique par les forces de frottements. $\vec{f}$

Calculons cette force en supposant que celle ci reste constante sur le trajet AB.



Les forces de frottement s'oppose toujours au mouvement



$$W_{AB}(\vec{f}) = \vec{f}\cdot\vec{AB} = f \times AB \times \cos(\widehat{\vec{f};\vec{AB}})$$

$$= f \times AB \times \cos 180°$$

$$= -f \times AB$$

Le travail est bien négatif, la force f s'oppose au mouvement.

D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum W_{AB}(\vec{F})$$

$$\Rightarrow E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R}) + W_{AB}(\vec{f})$$

$$\frac{1}{2}mV_B'^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = mg(z_A - z_B) + 0 - f\cdot AB$$

avec toujours $V_A = 0\ m/s$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mV_B'^2 = mg(z_A - z_B) - f\cdot AB$$

Il s'agit maintenant d'isoler f.

$$\Rightarrow f \times AB = mg(z_A - z_B) - \frac{1}{2}mV_B'^2$$

$$\Rightarrow f = \frac{mg(z_A - z_B) - \frac{1}{2}mV_B'^2}{AB}$$

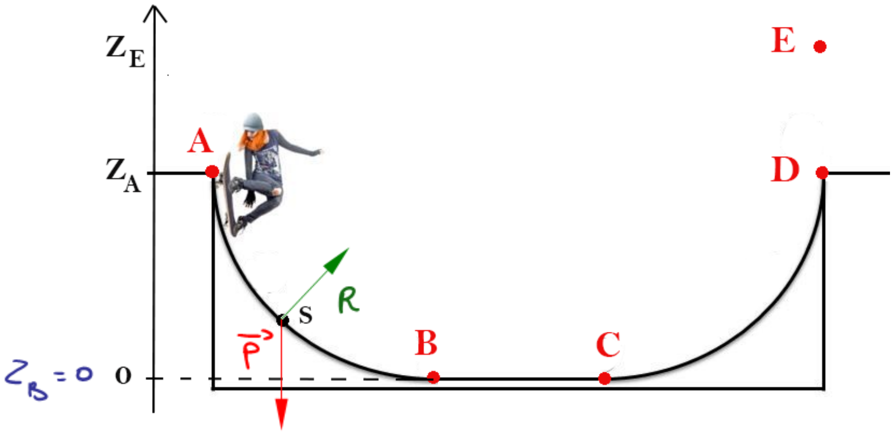
$$\Rightarrow f = \frac{75 \times 9{,}81(107 - 66) - \frac{1}{2} \times 75 \times 21^2}{88}$$

$$\Rightarrow f = 155\ N$$

Exercice 2 :
Une skateuse se présente au point A sans vitesse initiale abords d'une rampe.
Cette rampe est constituée de 2 quarts-de-cercle.
On négliera, dans un premier temps, les forces de frottement.
Données :
- Masse de la skateuse : m =65 kg
- Hauteur de la rampe $Z_A = 3{,}0\ m$

1- La skateuse sera assimilée à un point matériel. Faire un bilan des forces et représentez les forces au point S.
2- Calculez les travaux des forces sur le trajet AB
3- En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculez la vitesse V_B de la skateuse au point B.
4- Calculez la vitesse de la skateuse au point C.
5- Calculez la hateur Z atteinte par la skateuse après le point C. Justifiez.

La skateuse souhaite maintenant atteindre une hauteur $Z_E = 5{,}0\ m$
6- Quelle devrait être la vitesse au point A de la skateuse pour atteindre cette altitude Z_E ?



1) Bilan des forces
- le poids $\vec{P}$
- $\vec{R}$: la réaction du support toujours $\perp$ au trajet

2) Calcul des travaux

$W_{AB}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B)$
$A \to B \qquad A \to B$
$= 65 \times 9{,}81(3 - 0)$
$= 1{,}9 \cdot 10^3\ J$

$W_{AB}(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{AB}$
$= R \times AB \times \cos(\widehat{\vec{R}, \vec{AB}})$

or $\vec{R}$ et toujours $\perp$ au trajet AB
$\Rightarrow \cos(\widehat{\vec{R}, \vec{AB}}) = \cos 90° = 0$

donc $W_{AB}(\vec{R}) = 0\ J$

3) Calcul de la vitesse au point B
D'après le théorème de l'energie cinétique

$\Delta E_c = \Sigma W_{AB}(\vec{F})$

$\Rightarrow \underset{\text{finale}}{E_c(B)} - \underset{\text{initiale}}{E_c(A)} = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R})$

donc $\frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 = mg(z_A - z_B) + 0$

⚠ $V_A = 0\ m/s$ et $z_B = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} V_B^2 = \cancel{m} g z_A$

$\Rightarrow V_B^2 = 2 g z_A$

$\Rightarrow V_B = \sqrt{2 g z_A} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 3}$

$\Rightarrow V_B = 7{,}7\ m/s$

4) Calcul de la vitesse au point C

$\Delta E_c = \Sigma W_{BC}(\vec{F})$

$E_c(C) - E_c(B) = W_{BC}(\vec{P}) + W_{BC}(\vec{R})$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_C^2 - \frac{1}{2} m V_B^2 = mg(z_C - z_B)$

⚠ $z_C = z_B = 0\ m$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_C^2 - \frac{1}{2} m V_B^2 = 0$

$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m} V_C^2 = \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m} V_B^2$

$\Rightarrow V_C = V_B = 7{,}7\ m/s$ ce qui est normal puisque pas de frottement

5) Calcul de la hauteur z au point X (inconnu) atteinte par la skateuse

D'après le théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c = \sum W_{CX}(\vec{F})$$

$$E_c(X) - E_c(C) = W_{CX}(\vec{P}) + W_{CX}(\vec{R})$$

$$\frac{1}{2} m V_x^2 - \frac{1}{2} m V_C^2 = mg(z_C - z_x) + 0$$

⚠ La skateuse s'arrête quand elle n'a plus de vitesse $V_x = 0\,m/s$ et $z_C = 0\,m$

$$\Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m V_C^2 = mg(0 - z_x)$$

$$\Rightarrow \cancel{-}\cancel{m} g z_x = \cancel{-} \frac{1}{2} \cancel{m} V_C^2$$

$$z_x = \frac{V_C^2}{2g} = \frac{7{,}7^2}{2 \times 9{,}81}$$

$$\Rightarrow z_x = 3{,}0\ m$$

Le point atteint est le point D.
car il n'y a pas de frottement.

6) Calcul de la vitesse nécessaire V'_A pour atteindre le point E

D'après le théorème cinétique

$$\Delta E_c = \sum W_{AE}(\vec{F})$$

$$\Rightarrow E_c(E) - E_c(A) = W_{AE}(\vec{P}) + W_{AE}(\vec{R})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_E^2 - \frac{1}{2} m V_A'^2 = mg(z_A - z_E)$$

⚠ La skateuse s'arrête au point E car elle n'a plus de vitesse $V_E = 0\,m/s$

$$\Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m V_A'^2 = mg(z_A - z_E)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \cancel{m} V_A'^2 = \cancel{m} g(z_A - z_E)$$

$$\Rightarrow V_A'^2 = -2g(z_A - z_E)$$

$$\Rightarrow V'_A = \sqrt{-2g(z_A - z_E)}$$

$$\Rightarrow V'_A = \sqrt{-2 \times 9{,}81(3 - 5)} = 6{,}3\ m/s$$

25 Chute de grêlons

Des chutes de grêlons peuvent faire d'importants dégâts. Un grêlon de masse $m = 13{,}0$ g qui chute de 1 500 m d'altitude sans vitesse initiale peut atteindre au sol une vitesse de 160 km · h^{-1}. On assimilera le système grêlon à un point matériel.

Donnée :
Intensité de la pesanteur : $g = 9{,}81$ m · s^{-2}

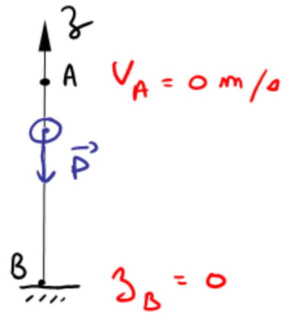
LES CLES DE L'ENONCE

- Les **valeurs de masse et hauteur** de chute sont renseignés dans l'énoncé.
- La **vitesse mesurée** indiquée sera à comparer avec la valeur obtenue dans le modèle de la chute sans action de l'air.

1. Quel type d'énergie est responsable du dégât occasionné sur le pare-brise ci-dessus ?
2. a. Faire une étude énergétique en négligeant l'action de l'air sur le grêlon.
b. Calculer la valeur de l'énergie mécanique au point de départ A.
c. Déterminer dans ce cas la vitesse qu'aurait le grêlon en arrivant au sol.
d. Peut-on retenir ce modèle ?
3. **Faire une étude énergétique** en tenant compte de l'action de l'air sur le grêlon. Déterminer le travail de la force de frottement qui modélise cette action.

LES QUESTIONS À LA LOUPE

- **Faire une étude énergétique** : exprimer les différentes formes d'énergie pour décrire l'état du système et les relier grâce au théorème de l'énergie cinétique ou en exprimant la conservation (ou non) de l'énergie mécanique.



1) L'énergie responsable du dégât est l'énergie mécanique et plus particulièrement E_c car $E_{pp}(B) = 0$ J

2a

Au point A

- $E_c(A) = 0$ J car pas de vitesse initiale
- $E_{pp}(A) = mgz_A$

$\Rightarrow E_m(A) = E_c(A) + E_{pp}(A) = E_{pp}(A) + 0$

Au point B :

- $E_c(B) = \frac{1}{2} m V_B^2$
- $E_{pp}(B) = mgz_B = 0$ car $z_B = 0$ m

$\Rightarrow E_m(B) = E_c(B) + E_{pp}(B) = E_c(B) + 0$

2b : Calcul de $E_m(A)$

$$E_m(A) = E_c(A) + E_{pp}(A) = \frac{1}{2} m V_A^2 + mgz_A$$

⚠ $V_A = 0$ m/s

$$\Rightarrow E_m(A) = 0 + mgz_A = \underbrace{13.10^{-3}}_{kg} \times 9{,}81 \times 1500 = 191 \text{ J}$$

2c : Calcul de la vitesse V_B du grêlon.

Il n'y a pas de frottement donc l'énergie mécanique se conserve E_m et donc la variation est nulle $\Delta E_m = 0$

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_{pp} = 0$$

$$\Rightarrow E_c(B) - E_c(A) + E_{pp}(B) - E_{pp}(A) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 + mgz_B - mgz_A = 0$$

⚠ $V_A = 0$ m/s et $z_B = 0$ m

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_B^2 - 0 + 0 - mgz_A = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} V_B^2 = \cancel{m} g z_A$$

$$\Rightarrow V_B^2 = 2gz_A$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{2gz_A} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 1500}$$

$$\Rightarrow V_B = 172 \text{ m/s}$$

Le grêlon parcourt 172 m en 1 s

$\Rightarrow$ en 1 min 60 × plus

$\Rightarrow$ en 1 h 60 × plus

$\Rightarrow$ 10^{-3} pour passer en km

$$V_B = 172 \times 60 \times 60 \times 10^{-3} \text{ km/h} = 612 \text{ km/h}$$ 😱

Cette vitesse est très élevée parce que l'on ne tient pas compte des forces de frottement

Question supplémentaire : En supposant que cette force soit constante sur le trajet AB, calculer sa valeur f

$$\Delta E_m = W_{AB}(\vec{f})$$

$$\Rightarrow E_c(B) - E_c(A)$$