CORRECTION DS préparation cours n°6

« Mouvement dans un champ de gravitation : satellites »

1.1. Pour une ellipse, on a :

$$A = \frac{Aphélie + Périhélie}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \frac{816{,}6 \cdot 10^6 + 740{,}5 \cdot 10^6}{2} = 778{,}6 \cdot 10^6 \ km$$

1.2. La durée T_J est le double de la durée entre le périhélie (17 mars 2011) et l'aphélie (17 février 2017).
Donc :

$$T_J = 2 \times (5 \times 12 + 11) = 142 \ mois$$

1.3. En unité S.I. on a donc :

$$T_J = 142 \times 30{,}44 \times 24 \times 3600 = 3{,}73 \cdot 10^8 \, s$$

1.4. Comme la Terre et Jupiter tournent toutes deux autour de la même étoile, d'après la troisième loi de Kepler on peut donc écrire :

$$\frac{{T_J}^2}{{A_J}^3} = \frac{{T_T}^2}{{A_T}^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_J = A_T \left(\frac{T_J}{T_T} \right)^{(2/3)}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_J = 150 \cdot 10^6 \left(\frac{3{,}73 \cdot 10^8}{365{,}25 \times 24 \times 3600} \right)^{(2/3)} = 778 \cdot 10^6 \ km$$

1.5. On sait que :

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{2\pi R_J}{T_J}$$

$$\Leftrightarrow \quad v = \frac{2\pi \times 780 \cdot 10^6}{3{,}73 \cdot 10^8} = 13{,}1 \ km \cdot s^{-1}$$

2.1. D'après la deuxième loi de Kepler, le rayon vecteur balaye des aires égales pendant des durées égales. Or, comme le rayon vecteur est constant dans une trajectoire circulaire, la distance parcourue pendant des durées identiques doit être la même. Donc la vitesse de Callisto est constante.

2.2. Voir schéma :

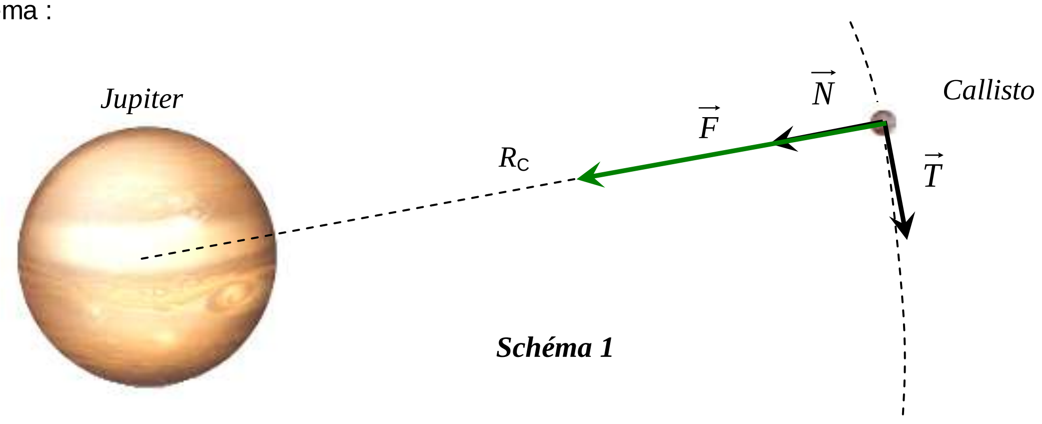


Schéma 1

2.3. Expression de la force :

$$\vec{F} = G \cdot \frac{M_J \times m_C}{{R_C}^2} \cdot \vec{N}$$

2.4. D'après la deuxième loi de Newton, on a :

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad G \cdot \frac{M_J \times m_C}{{R_C}^2} \cdot \vec{N} = m_C \vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{a} = G \cdot \frac{M_J}{{R_C}^2} \cdot \vec{N}$$

2.5.1. Comme l'accélération est purement normale, on a donc l'égalité :

$$\Leftrightarrow \quad \vec{a} = a \cdot \vec{N} = G \cdot \frac{M_J}{R_C^{\ 2}} \cdot \vec{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{v_C^{\ 2}}{R_C} \cdot \vec{N} = G \cdot \frac{M_J}{R_C^{\ 2}} \cdot \vec{N} \qquad \text{car } a_N = \frac{v^2}{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_C = \sqrt{G \cdot \frac{M_J}{R_C}}$$

2.5.2. D'après cette expression, on remarque que plus le rayon orbital est petit plus la vitesse orbitale est grande, car le rayon est au dénominateur. Donc c'est Io, la lune la plus proche, qui est la plus rapide.

2.6.1. On a : $v_C = \sqrt{G \cdot \frac{M_J}{R_C}}$

Or, on a aussi : $v_C = \frac{2\pi \cdot R_C}{T_C}$

Donc : $\frac{2\pi \cdot R_C}{T_C} = \sqrt{G \cdot \frac{M_J}{R_C}}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4\pi^2 \cdot R_C^{\ 2}}{T_C^{\ 2}} = G \cdot \frac{M_J}{R_C}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{T_C^{\ 2}}{R_C^{\ 3}} = \frac{4\pi^2}{GM_J}$$

2.6.2. Il s'agit de la troisième loi de Kepler

2.7.1. La sonde *Juno* orbitant aussi autour de Jupiter, on a donc :

$$\frac{T^2}{A^3} = \frac{4\pi^2}{GM_J}$$

$$\Leftrightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{A^3}{GM_J}}$$

$$\Leftrightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(1{,}37 \cdot 10^9\right)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 1{,}90 \cdot 10^{27}}} = 8{,}95 \cdot 10^5\ s$$ soit 10,4 jours environ.

2.7.2. La force doit partir du centre de *Juno* en direction du centre de Jupiter.

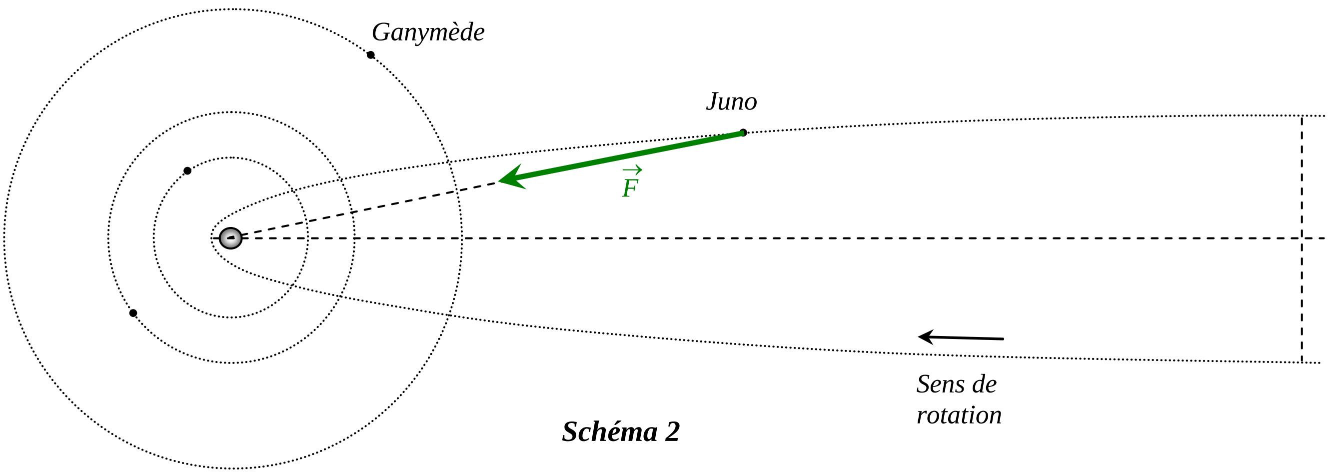
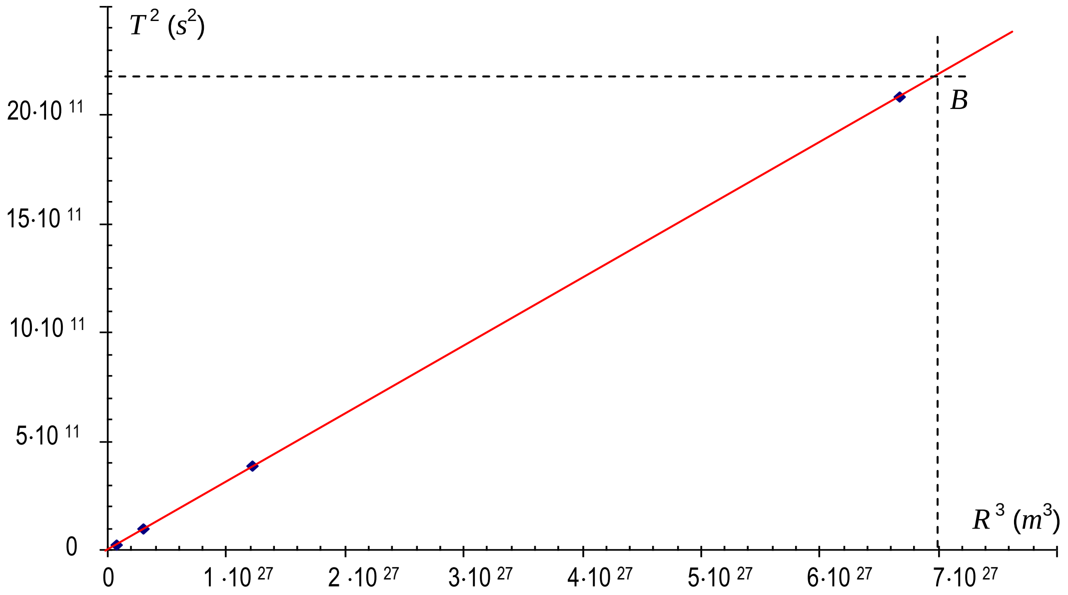


Schéma 2

2.7.3. Dans cette position, *Juno* s'éloigne de Jupiter tout en étant attirée par elle. Sa vitesse diminue donc lorsqu'elle s'éloigne de Jupiter.

Question bonus : 2.8. Détermination de la masse de Jupiter :



1. On trace la droite moyenne
2. On détermine sa pente p

$$p = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} = \frac{22 \cdot 10^{11}}{7{,}0 \cdot 10^{27}} = 3{,}1 \cdot 10^{-16}\ s^2 \cdot m^{-3}$$

3. L'équation de la droite est donc :

$$T^2 = p \cdot R^3$$

Or d'après la troisième loi de Kepler :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_J} \cdot R^3$$

4. On en déduit donc que :

$$p = \frac{4\pi^2}{GM_J}$$

D'où :

$$M_J = \frac{4\pi^2}{Gp}$$

$$M_J = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 3{,}1 \cdot 10^{-16}}$$

$$M_J = 1{,}9 \cdot 10^{27}\ kg$$