



COURS n°6

« Mouvement dans un champ de gravitation : satellites »

Les compétences à acquérir...

- Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération du centre de masse d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation newtonien.
- Établir et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire.
- Mouvement des satellites et des planètes. Orbite.
- Lois de Kepler.
- Période de révolution.
- Satellite géostationnaire.



Depuis 1957 l'environnement spatial proche de la Terre voit chaque année de nouveaux débris s'accumuler en raison de la prolifération des vols spatiaux. Regarder les 5 premières minutes de la vidéo

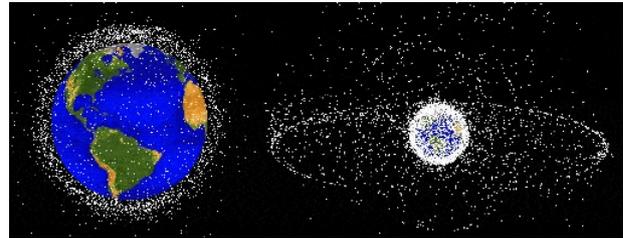
<https://youtu.be/swRLFRkxjsE>

Au fil des années des dizaines de tonnes de matériels devenus inutilisés sont abandonnés sur orbite en attendant une lente dégradation ou leur récupération.

Selon un rapport du NORAD établi le 1/01/1999 et suite au recensement effectué par le Space Surveillance Network de l'US Space Command (USSPACECOM), depuis 1957, la Russie, les Etats-Unis, l'Europe, le Japon, la Chine, l'Inde et Israël ont procédé à près de 5 343 lancements réussis d'engins spatiaux.

Cela représente plus de 20 000 tonnes de matériaux et 25 500 objets divers en orbite autour de la Terre, parmi lesquels il ne reste que 595 satellites opérationnels représentant une masse de 4 500 tonnes.

Parmi ces objets spatiaux on dénombre 15 680 débris de plus de 10 cm orbitant entre 400 et 1 500 km d'altitude. 100 000 objets d'une taille inférieure à 10 cm sont en orbite basse et il devrait y avoir des centaines de milliers de débris de taille inférieure au centimètre pour un total de quelque 35 millions de débris si on s'attarde aux particules de moins d'un millimètre.



Qu'est ce qui régit les mouvements de ces satellites ? ... les 3 lois de KEPLER et la seconde loi de Newton

Je construis mon cours à partir de la vidéo 1 du chapitre 5 sur le site capneuronal ...

I- Lois de KEPLER :

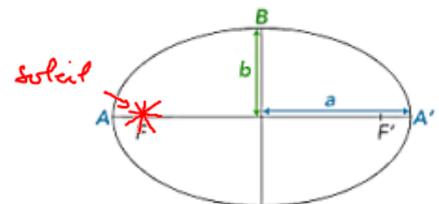
Au 17^{ème} siècle, en utilisant les observations de Tycho Brahe (1546-1604), Johannes Kepler formule trois lois qui décrivent le mouvement des planètes autour du soleil.

Première loi de Kepler : Loi des orbites

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre de gravité d'une planète est une ellipse dont le centre de gravité du soleil est l'un des foyers. Rq : a est le demi-grand axe.

Dessinez un joli soleil sur l'ellipse ci-contre !

Les ellipses



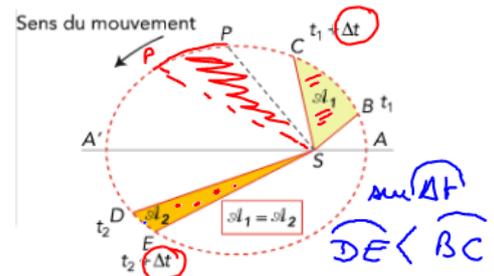
F et F' sont les foyers de l'ellipse. [AA'] est son grand axe il mesure 2a. [BB'] est son petit axe, il mesure 2b.

Deuxième loi de Kepler : Loi des aires

Le segment de droite [SP] reliant les centres de gravité S du soleil et de la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

Pour une même Δt, les Aires A₁ et A₂ sont égales : A₁ = A₂

La planète accélère en s'approchant du soleil.



Troisième loi de Kepler : Loi des périodes

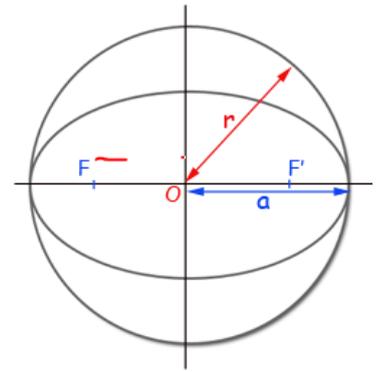
Pour toutes les planètes du système solaire, le rapport entre le carré de la période de révolution T et le cube du demi-grand axe a est égale à une constante notée k.

T² et a³ sont proportionnels. T² = k x a³

$\frac{T^2}{a^3} = k = \text{constante}$ (Axe attracteur Soleil)

Remarques importantes pour les exercices :

- Les lois de Kepler peuvent s'appliquées à toutes planètes ou satellite en rotation autour d'un astre attracteur de masse M.
- Afin de poursuivre l'étude du mouvement d'un satellite ou d'une planète autour d'un astre attracteur, nous considérerons, par approximation, que sa trajectoire est un cercle de rayon r.



- Dans le cas particulier où la trajectoire est un cercle de rayon r, la troisième loi de Kepler devient : $r = a$

$$\frac{T^2}{r^3} = \dots k = \text{constante}$$

Donnez l'expression et calculer le rayon r de la trajectoire de la terre autour du soleil

3^{ème} loi Kepler

$$\frac{T_N^2}{r_N^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{T_V^2}{r_V^3} = k$$

$$r_T = \sqrt[3]{\frac{T_T^2 \times r_V^3}{T_V^2}}$$

$$\sqrt{x} = (x)^{1/2}$$

$$\sqrt[3]{x} = (x)^{1/3}$$

3^o LOI

Planète	T en s	r en m	T ² / r ³
MERCURE	7,6 . 10 ⁶	5,79 . 10 ¹⁰	2,98 . 10 ⁻¹⁹
VENUS	1,94 . 10 ⁷	1,08 . 10 ¹¹	2,99 . 10 ⁻¹⁹
TERRE	(3,16 . 10 ⁷)	x	3,02 . 10 ⁻¹⁹
MARS	5,94 . 10 ⁷	2,28 . 10 ¹¹	2,98 . 10 ⁻¹⁹
JUPITER	3,74 . 10 ⁸	7,78 . 10 ¹¹	2,97 . 10 ⁻¹⁹ ←
SATURNE	9,30 . 10 ⁸	1,42 . 10 ¹²	3,02 . 10 ⁻¹⁹
URANUS	2,66 . 10 ⁹	2,87 . 10 ¹²	2,99 . 10 ⁻¹⁹
NEPTUNE	5,20 . 10 ⁹	4,50 . 10 ¹²	2,97 . 10 ⁻¹⁹
	PERIODE		CONSTANTE

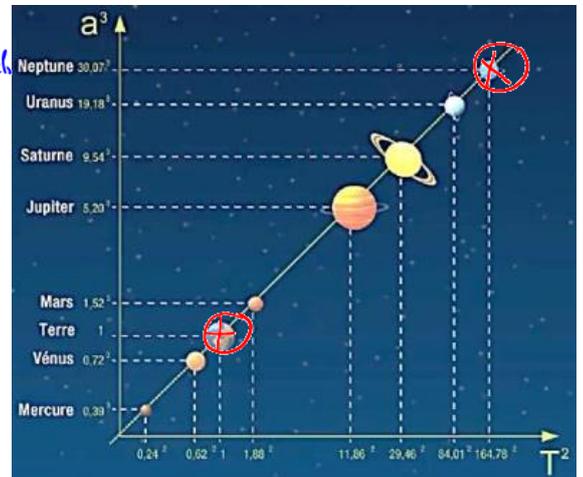
- A partir de la 3^{ème} loi de Kepler, justifier le graphe ci-contre. C'est-à-dire démontrer que r³ (ou a³) et T² sont proportionnels. Exprimez ce coefficient de proportionnalité k'.

3^{ème} loi de Kepler $\frac{T^2}{r^3} = k$
 $\Rightarrow T^2 = k \times r^3$ donc T² et r³ sont proportionnels
 la courbe ci-contre $r^3 = f(T^2)$ est une droite qui passe par l'origine. On retrouve T² et r³ sont proportionnels
 $r^3 = k' \times T^2$ avec $k' = \frac{1}{k}$

Expression de k'

$$k' = \frac{r_N^3 - r_T^3}{T_N^2 - T_T^2}$$

avec k' exprimé en m³/s²



II- Comment décrire le mouvement des satellites et des planètes ?

1- Force de gravitation universelle :

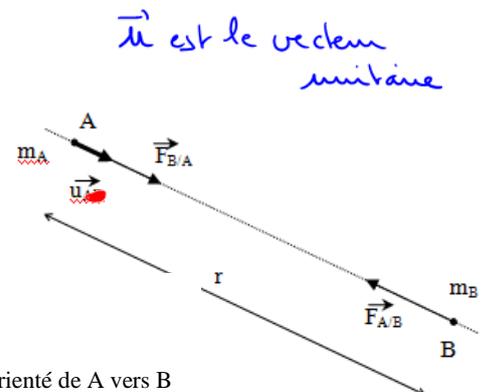
Deux corps assimilés à des points A et B, de masses m_A et m_B séparés d'une distance r, exercent l'un sur l'autre des forces d'attraction gravitationnelle de même valeur, $\vec{F}_{A/B}$ et $\vec{F}_{B/A}$ telles que :

$$\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B} = G \times \frac{m_A \times m_B}{r^2} \vec{u}$$

et $F_{B/A} = F_{A/B}$

les 2 vecteurs forces sont colinéaires et de sens contraires

- m_A et m_B en kilogrammes (kg)
- F_{A/B} = F_{B/A} en Newtons (N)
- \vec{u}_{AB} vecteur unitaire de direction (AB) orienté de A vers B
- G = 6,67 . 10⁻¹¹ N.m².kg⁻², constante de gravitation



Remarque : Cette loi se généralise aux corps non ponctuels à répartition sphérique de masse, comme la Terre, en considérant que toute la masse est concentrée en son centre.

2- Etude du mouvement d'un satellite ou d'une planète :

On étudie le mouvement d'un satellite S de masse m_{sat} assimilé à un point matériel, en orbite autour de la terre de centre O et de masse M_T . On se place dans l'approximation d'une **orbite circulaire** de rayon $r=OA = a$

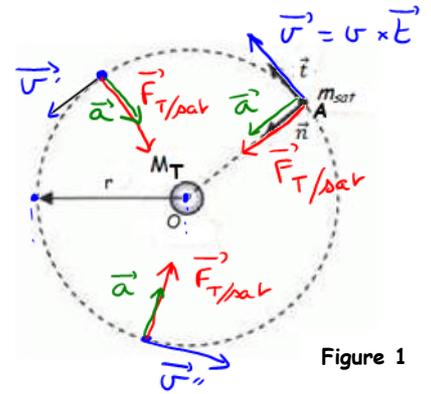


Figure 1

Définition du système et du référentiel :

- **Système** : { satellite }
- **Référentiel** : Géocentrique supposé Galiléen

Le mouvement étant plan, on utilise le **repère de Frenet mobile** (A, \vec{t}, \vec{n}) où \vec{t} est appelé vecteur tangentiel toujours dans le sens du mouvement et \vec{n} vecteur normal dirigé vers le centre de la terre

Bilan de forces extérieures appliquées au système :

... de satellite m'est soumise qu'à la force de gravitation universelle exercée par la terre

Expression vectorielle de cette force et ses coordonnées dans le repère de Frenet mobile (A, \vec{t}, \vec{n})

$$\vec{F}_{T/sat} = G \times \frac{M_T \times m_{sat}}{r^2} \times \vec{m} \quad (+ 0 \times \vec{E}') \text{ dans le repère}$$

$$\text{Coordonnées } \vec{F}_{T/sat} \begin{cases} F_t = 0 \\ F_n = G \times \frac{M_T \times m_{sat}}{r^2} \end{cases}$$

Appliquons la deuxième loi de Newton afin de déterminer l'expression de l'accélération du satellite ainsi que ses coordonnées dans le repère de Frenet:

Seconde loi de Newton

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_{sat} \times \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{T/sat} = m_{sat} \times \vec{a}$$

$$\Rightarrow m_{sat} \times \vec{a} = G \times \frac{M_T \times m_{sat}}{r^2} \vec{m}$$

donc

$$\vec{a} = \frac{G \times M_T}{r^2} \vec{m} + (0 \times \vec{E}')$$

Coordonnées du vecteur **accélération**

$$\vec{a} \begin{cases} a_t = 0 \\ a_n = \frac{G \times M_T}{r^2} \end{cases}$$

Dans le repère de Frenet (O, \vec{t}, \vec{n}) , l'accélération \vec{a} dans un mouvement quelconque a pour expression générale :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \times \vec{t} + \frac{v^2}{r} \times \vec{n}$$

A partir des coordonnées du vecteur accélération et de l'expression générale de l'accélération dans le repère de Frenet, que peut on dire la vitesse et quelle est son expression ? Quelle est la relation « simple » entre la vitesse et l'accélération ?

l'accélération s'exprime dans le repère de Frenet

$$\vec{a} = \frac{dv}{dr} \times \vec{t} + \frac{v^2}{r} \vec{n}$$

$$\text{et } \vec{a} = 0 \times \vec{t} + \frac{G \times M_T}{r^2} \vec{n}$$

On en déduit que

$$\frac{dv}{dr} = 0 \Rightarrow v = \text{constante}$$

la norme du vecteur vitesse est constante mais pas le vecteur

On vient de montrer que le mouvement est circulaire uniforme.

$$\text{et } \frac{v^2}{r} = \frac{G \times M_T}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{G \times M_T}{r} \times r$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \times M_T}{r}}$$

Nous retiendrons que, pour un mouvement circulaire et uniforme, l'accélération est centripète (toujours dirigé vers le centre du cercle) et son expression est

$$a = \frac{v^2}{r} = \text{constante pour } r \text{ donné}$$

- Exprimer la **période de révolution T** du satellite autour de l'astre : c'est la durée mise par le satellite pour faire un tour autour de la terre.

On sait que $v = \frac{L}{T}$ où L est la distance parcourue par le satellite et T la durée du parcourt.

$$v = \frac{d}{\Delta T} = \frac{L}{T}$$

- Exprimer L en fonction du rayon r

Le sat parcourt 1 tour en une période L = périmètre
 $L = 2\pi r$

En déduire l'expression de T

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} \text{ avec } v = \sqrt{\frac{GN_T}{r}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GN_T}{r}}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{\frac{GN_T}{r}}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{r}{GN_T} \times 4\pi^2 r^2$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GN_T} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GN_T}}$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GN_T}}$$

A partir de l'expression précédente retrouver la 3^{ème}

loi de Kepler. C'est dire que le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est constant et qu'il est indépendant de la masse du satellite : il ne dépend que de la masse responsable de l'attraction gravitationnelle (...ici... la terre...).

$$\text{on a } T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GN_T} \Rightarrow \left[\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GN_T} = k \right] \text{ car une constante qui ne dépend de la masse de l'AA}$$

Remarque : La vitesse et la période d'un satellite animé d'un mouvement circulaire et uniforme autour du centre de la Terre dépendent uniquement de l'altitude du satellite. Quand l'altitude augmente, la **vitesse diminue**..... et la **période de révolution**.....

distance T-sat.

Expression de son altitude h en fonction de T, R_T et M_T :

On pose $r = R_T + h$ où R_T est le rayon de la terre

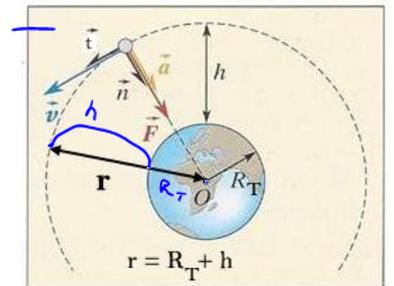
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GN_T}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GN_T}}$$

$$\Rightarrow 4\pi^2 \times \frac{(R_T + h)^3}{GN_T} = T^2$$

$$\Rightarrow (R_T + h)^3 = \frac{T^2 \times GN_T}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \times GN_T}{4\pi^2}} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \times GN_T}{4\pi^2}} - R_T$$

⚠ R_T doit être en m.



3- Cas particulier des satellites géostationnaires : Il existe des satellites dits **géostationnaires**. Ils parcourent, dans le référentiel géocentrique, un cercle d'Ouest en Est et permettent d'observer continuellement des « zones » de la terre.

- Quelles sont les 2 conditions pour lesquelles un satellite peut il être en géostationnaire ?

- Sa trajectoire est dans le plan équatorial
- Ce sat. géo. se trouve à une altitude précise h_{geo}

- Quelle est la relation entre la période de rotation sur elle même de la terre T_T et la période de révolution du satellite géostationnaire autour de la terre T_{sat} ? Calculer la valeur T_{sat} en seconde

Pour que sat soit toujours au-dessus d'un m point de la terre

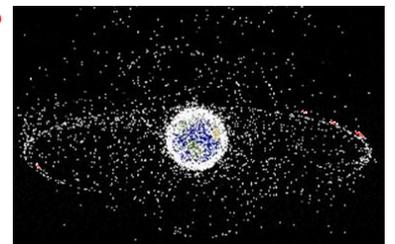
$$T_{sat} = T_T = 24h = 1 \times 24 \times 60 \times 60 = 86400 \text{ s}$$

En déduire l'altitude h_{geo} d'un satellite géostationnaire

$M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ (*) Vitesse du sat geo stat (m, km)
 $R_T = 6400 \text{ km}$

$$h_{geo} = \sqrt[3]{\frac{T_{sat}^2 \times GN_T}{4\pi^2}} - R_T$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(86400)^2 \times 6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,97 \cdot 10^{24}}{4\pi^2}} - 6400 \times 10^3 = 3,60 \cdot 10^7 \text{ m} = 3,60 \times 10^4 \text{ km}$$



III- Exploitation de la troisième loi :

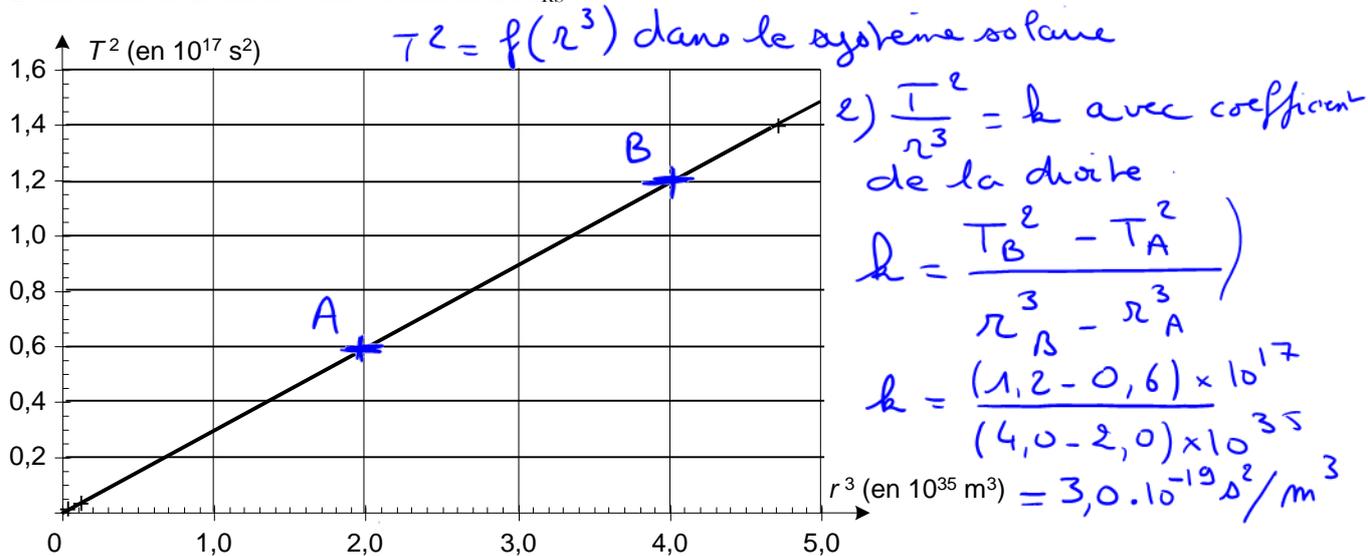
1- Le graphe ci-dessous ci-contre représente l'évolution du carré de la période de révolution des planètes Terre, Mars et Jupiter en fonction du cube du rayon de leur orbite. Ce graphe est-il en accord avec la troisième loi de Kepler ?

2- En utilisant le graphe, montrer que $\frac{T^2}{r^3} \approx 3,0 \cdot 10^{-19} \text{ SI} (\text{s}^2/\text{m}^3)$

3- Déterminer la masse du soleil.

« Une équipe composée de Franck Marchis (université de Californie à Berkeley) et de trois astronomes de l'Observatoire de Paris, Pascal Descamps, Daniel Hestroffer et Jérôme Berthier, vient de découvrir un astéroïde, nommé Rhea Sylvia, qui gravite à une distance constante du Soleil avec une période de révolution de 6,521 ans. »

4- Déterminer la distance soleil - Rhea notée d_{RS}



1) La courbe $T^2 = f(r^3)$ est une droite qui passe par l'origine. Donc T^2 et r^3 sont proportionnels
 $\Rightarrow T^2 = k \times r^3$ avec k constant.
 $\Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = k$ ce qui correspond à la 3^{ème} loi de Kepler

3)

Reposé de French
(G, \vec{E}, \vec{m})

Mouvement circulaire

- $\vec{F}_{S/T}$
- 2^{ème} loi de Newton $\rightarrow \vec{a}$
- $\Rightarrow v$
- $\rightarrow T$
- \rightarrow 3^{ème} de Kepler

Système {Terre}

$$k = \frac{4\pi^2}{G M_S}$$

Mouvement quelconque

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e} + \frac{v^2}{r} \vec{m}$$

$\Rightarrow \vec{a} = \frac{G M_S}{r^2} \vec{m} + 0 \times \vec{e}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{constante}$
 Mot circulaire uniforme

$\frac{v^2}{r} = \frac{G M_S}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{G M_S}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G M_S}{r}}$