COURS n°8 « Modèle du gaz parfait et le premier principe de la thermodynamique »

Les compétences à acquérir…

- Énergie interne d'un système. Aspects microscopiques.
- Citer les différentes contributions microscopiques à l'énergie interne d'un système.
- Premier principe de la thermodynamique. Transfert thermique, travail.
- Prévoir le sens d'un transfert thermique. Distinguer, dans un bilan d'énergie, le terme correspondant à la variation de l'énergie du système des termes correspondant à des transferts d'énergie entre le système et l'extérieur.
- Capacité thermique d'un système incompressible. Énergie interne d'un système incompressible.
- Exploiter l'expression de la variation d'énergie interne d'un système incompressible en fonction de sa capacité thermique et de la variation de sa température pour effectuer un bilan énergétique.
- Effectuer l'étude énergétique d'un système thermodynamique.
- Modes de transfert thermique. Flux thermique. Résistance thermique.
- Bilan thermique du système Terre-atmosphère. Effet de serre.
- Loi phénoménologique de Newton, modélisation de l'évolution de la température d'un système au contact d'un thermostat.

I- Gaz parfait

1- Modèle du gaz parfait: Le **modèle du gaz parfait** est souvent utilisé pour prévoir le comportement de certains gaz lorsqu'on fait varier certains paramètres tels que la pression ou la température.

Ce modèle repose sur les deux hypothèses suivantes :

- Les entités n'ont pas d'interactions entre elles : on considère qu'elles sont suffisamment éloignées les une des autres et qu'il n'existe pas de forces entre elles.
- Les entités constituant le gaz ont un volume négligeable devant le volume de l'enceinte qui les contient : elles sont assimilées à des points matériels.

2- L'équation d'état du gaz parfait

Pour une quantité de matière n de gaz parfait, la pression P, la température T et le volume V vérifient la relation :

$PV = nRT$	**P** pression exprimée en .Pascal….Pa	1,0 atm = 1,0 bar = 1,0.10^5. Pa 1013 hPa = 1013 × 10^2 Pa
	V volume exprimé en ..m^3………..	
	T température exprimé en ..Kelvin.K	T(K) = T(°C) + 273,15
	n quantité exprimée en ..mol……..	
	R constante des gaz parfaits $R = 8{,}314\ J.mol^{-1}.K^{-1}$	

Exercices:

Calculer la quantité d'hélium n_{He} contenue dans une enceinte de volume V = 5,0 L dont la pression est P_1 = 2,5 atm et la température est T_1 = 30°C

Calcul de n_{He}

$P_1 V = n_{He} R T_1$

$\Rightarrow n_{He} = \frac{P_1 V}{R T_1} = \frac{2{,}5.10^5 \times 5{,}0.10^{-3}}{8{,}314 \times (30 + 273{,}15)}$

$= 0{,}50$ mol

La quantité d'hélium est maintenant égale $n'_{He} = 1{,}00\ mol$, la pression est $P_2 = 1{,}013 . 10^5\ Pa$ et la température est $T_2 = 25°C$.
Calculer le volume V_2 occupé par ce gaz
Comment appelle-t-on ce volume ?

$n'_{He} = 1$ mol , $V_2 = V_m$ volume molaire

Calcul de V_2 $P_2 V_2 = n'_{He} R T_2$

$\Rightarrow V_2 = \frac{n'_{He} R T_2}{P_2}$

$= \frac{1{,}00 \times 8{,}314 \times (25 + 273{,}15)}{1{,}013\ 10^5}$

$= 2{,}45.10^{-2}\ m^3 = 24{,}5$ L

Remarque :

Si la température du système gaz parfait reste .constante…. (..isotherme..) , on retrouve **la loi de Boyle Mariotte**. , l'équation d'état s'écrit $\boldsymbol{P \times V}$ = constante

Exercice : Un gaz est maintenu dans une seringue : la pression est de $P_3 = 1{,}0$ bar et le volume est de $V_3 = 3{,}0\ cm^3$
Le gaz est comprimé lentement (température constante) de façon obtenir une pression $P_4 = 2{,}5$ bar
Quel est le nouveau volume V_4 ?

Calcul de V_4

$P_4 V_4 = P_3 V_3$ = constante

$\Rightarrow V_4 = \frac{P_3 V_3}{P_4} = \frac{1{,}0 \times 3{,}0}{2{,}5}$

$= 1{,}2\ cm^3$

II- Introduction à la notion d'énergie interne U d'un système :

1- Une drôle d'expérience :
Considérons comme système d'étude une marmite remplie d'eau {marmite + eau}

1 **Dans un premier temps,** la marmite est posée sur une table et poussée par une main exerçant une force constante $\vec{F}_{main}$ sur tout le trajet AB

Cette marmite remplie d'eau est mise en mouvement : Tant que elle reste sur la table, nous pouvons dire que **l'énergie E_{tot} du système** s'écrit :

$E_{tot} = E_m = E_c + E_{pp}$

avec ..$E_{pp} = 0$..........

Le théorème de l'énergie cinétique, nous permet d'écrire aussi que $\Delta Ec = \sum W_{AB}(\vec{F}) = W_{AB}(\vec{F}) + \overset{=0}{W_{AB}(\vec{P})} + \overset{=0}{W_{AB}(\vec{R})}$

On a donc une variation d'énergie totale $\Delta E_{tot} = E_c = \frac{1}{2} m v^2$

2 Considérons maintenant que la marmite est lâchée d'une altitude z_C sans vitesse initiale.
La variation d'énergie totale ΔE_{tot} du système s'écrit :

$\Delta E_{tot} = \Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_{pp} = 0$ si chute libre

Il y a transfert de l'énergie potentielle en énergie cinétique

3 La marmite est sur la table et posée sur un réchaud. L'eau bout.
La variation d'énergie totale du système s'écrit :

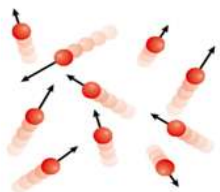
$\Delta E_{tot} = \Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_{pp}$

le système est immobile donc $\Delta E_c = 0$ et $\Delta E_{pp} = 0$

..Donc....$\Delta E_{tot} = 0$....alors..que..l'on........
..a apporté..de....l'énergie...........................
....
....Il..y..a...variation...d'énergie...............
....
.....................$\Delta E_{tot} \neq 0$...........................

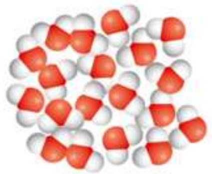
Il est nécessaire d'introduire une ...énergie...interne...noté..U

2- Energie interne d'un système U :



L'énergie interne U d'un système correspond à sa ..propre...énergie....
Elle correspond à la ..somme...des énergies...... qui existent à l'intérieur de ce système, au niveau .microscopique du fait de ses constituants (atomes, molécules, ions)

- **Du fait de l'agitation thermique**, chaque constituant possède une énergie cinétique $e_{c_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$
Cette agitation augmente lors d'une augmentation de .température....



- Les **énergies potentielles d'interaction** sont liées aux interactions entre les constituants qui constituent le système.
Elles peuvent être des .interactions....intra...ou..intermoléculaires...........

Nous définissons ainsi une énergie interne U = ...

Il est quasiment impossible de mesurer toutes ces énergies, c'est pourquoi nous nous intéresserons ..à..la........ .variation...d'énergie...interne....ΔU..

3- La variation d'énergie totale d'un système

La variation d'énergie totale ΔE_{tot} d'un système physique se décompose en :

- en une variation d'**énergies, au niveau .macroscopiques, (ΔEm)** : telle que $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_{pp}$

- en une variation d'**énergie interne, au niveau .microscopique., ΔU**

ainsi la variation de l'énergie totale d'un système, en thermodynamique, est s'écrit :

$\Delta E_{tot} = \Delta E_c + \Delta E_{pp} + \Delta U$

Dans cette partie du programme enterminale, nous n'étudierons que des systèmes **au repos à l'échelle macroscopique:**

$$\boxed{\Delta E_{tot} = \Delta U}$$

Repos macroscopique $\Delta E_c = 0$ et $\Delta E_{pp} = 0$

III- Le premier principe de la thermodynamique :

1- Énoncé du principe:

Le **premier principe de la thermodynamique** énonce que la variation d'énergie interne ΔU d'un système, qui est au repos macroscopique $\Delta E_m =$ .0., qui n'échange pas de matière avec l'extérieur (système .fermé...) et qui évolue d'un état initial à un état final est égale à la somme des énergies échangées par le système avec l'extérieur, sous forme de travail...W..... et / ou sous forme d'énergie...thermique...transférée...Q...

$$\Delta U_{i\to f} = W + Q$$

- W travail exprimé en .Joule J
- Q énergie thermique transférée exprimé en .Joule..J
- $\Delta U_{i\to f}$ variation d'énergie interne exprimée en .Joule J

Remarque importante :

Par convention, W et Q sont comptés .....positif............... quand le système reçoit cette énergie et ......négatif.................. quand il cède à l'extérieur.

2- Le travail W

Exercice :

Un gaz, dit compressible, est placé dans un cylindre, muni d'un piston mobile.

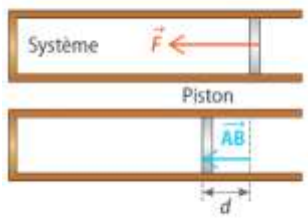
Une force pressante $\vec{F}$ constante est exercée sur le piston

Le piston se déplace de d dans le sens de la diminution de volume du gaz.

Exprimer le travail recu par le système {piston-gaz}

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = F \times AB \times \underbrace{\cos(\vec{F},\overrightarrow{AB})}_{=0}$$
$$= F \times d$$

Le travail W est recu par le système. Il est donc ..positif...



Dans de nombreux exercices, le système sera dit ..incompressible.........

Ce qui entraine que le travail $W =$ .0

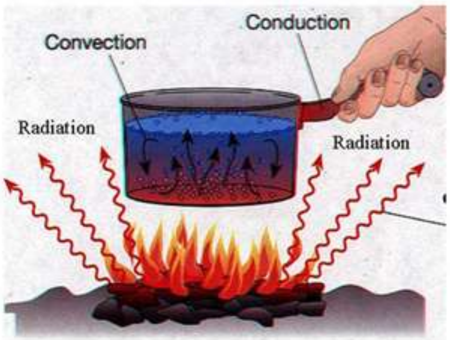
La variation d'énergie interne $\Delta U = W + Q$ ne sera due, dans ce cas de système incompressible, qu'à un transfert thermique :

$$\Delta U = Q$$

IV- Les trois modes de transfert :

1- Mode de transfert : Un transfert thermique (la chaleur) peut se propager de 3 façons différentes

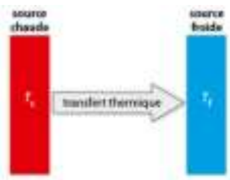
- Par .convection............. (l'agitation thermique, l'agitation des molécules ou atomes se transmet de proche en proche dans la matière, mais sans transport global de matière ; ce mode de transfert a principalement lieu dans les solides ;



- Par .convection..........(l'agitation thermique se transmet de proche en proche dans la matière et avec déplacement d'ensemble de celle-ci) ; ce mode de transfert a lieu dans les fluides (liquides et gaz)
- Par .rayonnement.......... (l'absorption ou l'émission d'ondes électromagnétiques modifie l'agitation thermique) ; ce mode de transfert a lieu quel que soit l'état, et se fait même au travers du vide.

2- Sens de transfert thermique :

Le sens du transfert thermique ne peut se faire que d'un milieu qui a la température la.plus.élevée..(la source chaude..) vers un milieu qui a la température la.plus.faible. (la source froide.), jusqu'à ce que leurs températures soient égales



3- Définition flux thermique :

Les transferts thermiques entre 2 systèmes (Une source chaude T_C et une source froide T_F) ne sont pas instantanés, ils évoluent en fonction du temps.

On définit pour suivre cette évolution le **flux thermique Φ** qui caractérise la vitesse d'un transfert thermique entre 2 systèmes, c'est l'énergie échangé par unité de temps,

Le flux thermique Φ (phi) traduit la vitesse de transfert thermique

$$\Phi = \frac{Q}{\Delta t}$$

Φ en watt (W)
Δt en seconde (s)
Q en joule (J)

Le flux thermique correspond à une .puissance...thermique

Rappels :

$$P = \frac{E}{\Delta t}$$

← J
← s
W

E énergie en J
P puissance en W
Δt durée en s

V- Les exemples à connaître :

1- Cas n°1 d'un système fermé et incompressible :

Dans le cas d'un système fermé, incompressible et en l'absence de changement d'état, la variation d'énergie interne d'un système est proportionnelle à la variation de température

$$\Delta U = m \times c \times \Delta T$$

Avec $\Delta T = T_{finale} - T_{initiale}$

Si $C = m \times c$ alors

$$\Delta U = C \times \Delta T$$

m : masse en kilogramme (kg)
ΔT : variation de température avec T en kelvin (K)
Avec T(K) = T(°C) + 273,15
Donc ΔT(K) = ΔT(°C)
ΔU :Variation d'énergie interne en joule (J)
c : capacité thermique massique en joule par kelvin par kilogramme ($J.K^{-1}.kg^{-1}$)
C : capacité thermique en joule par kelvin ($J.K^{-1}$)

Remarque : Que signifie une capacité thermique massique de l'eau $c_{eau}=4,18.10^3$ J $.kg^{-1}.K^{-1}$?
..C'est l'énergie qu'il faut fournir à 1 kg d'eau pour élever sa.....
..température..de..1 K..

Exercice : Calculer la variation d'énergie interne ΔU de la marmite en fonte de masse m_f=10 kg remplie d'un volume d'eau V_{eau} =150 mL que l'on chauffe sans la « déplacer ». La température du système {marmite + eau} passe d'une tempèrature T_i= 20°C à une température T_f=95°C.
Données : capcité massique de l'eau et de la fonte :c_{eau}=4,18.10³ J $.kg^{-1}.K^{-1}$ et C_{fonte}= 4,70.10³ J $.K^{-1}$

système {marmitte, eau}

$$\Delta U = \Delta U_{eau} + \Delta U_{marmitte}$$

$$= m_{eau} \times C_{eau} \times \Delta T + C_{fonte} \times \Delta T$$

avec $\rho_{eau} = \frac{m_{eau}}{V_{eau}} \Rightarrow m_{eau} = \rho_{eau} \times V_{eau}$

⚠ m_{eau} en kg

$$\Rightarrow \Delta U = \rho_{eau} \times V_{eau} \times C_{eau} \times (T_f - T_i) + C_{fonte} \times (T_f - T_i)$$

$$\Rightarrow \Delta U = 1,0 \times 150.10^{-3} \times 4,18.10^3 \times (95-20) + 4,70.10^3 \times (95-20)$$

$$= 4,0.10^5 \text{ J}$$

$$\Delta T = 95 + 273,15 - (20 + 273,15) = 95 - 20 = 75 \text{ K}$$

2- Etude du flux thermique à travers une paroi plane :

Pour une paroi plane, dont deux faces sont à des températures différentes T_1 et T_2, en fonction du matériau constituant la paroi, l'énergie Q est transférée plus ou moins rapidement de la source …chaude……………..
vers la source ..froide..........

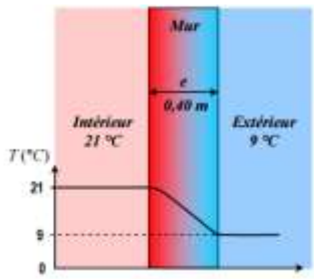
Définition de la résistance thermique :

La résistance thermique R_{th} d'un corps traduit sa capacité à ……………………… au flux thermique.

Pour une paroi plane dont les deux faces sont à la température T_C et T_F avec $T_C > T_F$, traversée par un flux thermique Φ, la résistance thermique R_{th} est définie par :

$$\Phi = \frac{T_C - T_F}{R_{th}}$$

Φ en W
T en K ou °C
R_{th} en …$K.W^{-1}$…..



Pour une paroi plane, la résistance thermique dépend de son épaisseur e, sa surface S et de la conductivité thermique λ du matériau

Matériau	λ ($W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}$)
Air	0,026
Polystyrène	0,036
Bois	0,16
Béton	0,92
Verre	1,2
Acier	46
Aluminium	250
Cuivre	390

+ faible

Ainsi

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda \times S}$$

e en m
S en m²
λ en $W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}$
R_{th} en $K\cdot W^{-1}$

On peut donc exprimer le flux thermique Φ de 2 façons :

$$\Phi = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{T_c - T_i}{R_{th}}$$ Utile dans les exercices

Remarques :

- Plus la résistance thermique est importante plus le flux thermique est …faible……………
- Un matériau possédant une résistance thermique élevée est un bon …isolant…thermique
- Plus la conductivité thermique est faible plus le matériau est …un…isolant…… de chaleur
  Cas de l'air : $\lambda = 0,026\ W.m^{-1}K^{-1}$ est faible donc l'air est un bon isolant
- D'après le tableau précédent, le meilleur isolant est …l'air………. (double …vitrage……….)
- Si plusieurs parois sont superposées leurs résistances thermiques …s'ajoutent……………

Exercice: La résistance thermique d'une vitre est $R_{th} = 5,0\text{x}10^{-3}$ K.W⁻¹; la température de la pièce est Tc = 21°C, la température extérieure est T_f = 9°C. Calculer le flux thermique et la chaleur perdue en 1h.

Calcul du flux Φ

$$\Phi = \frac{T_c - T_f}{R_{th}}$$

$$= \frac{21 - 9}{5,0.10^{-3}} = 2,4.10^{3}\ W$$

Calcul de Q

$$Q = \Phi \times \Delta t$$

$$= 2,4.10^{3} \times 1 \times 60 \times 60$$

$$= 8,7.10^{6}\ J$$

2- Cas n°2 : Etude du bilan radiatif de la Terre :Transfert thermique par rayonnement

Le transfert thermique par **rayonnement** est l'échange de photons, par émission et absorption, entre deux corps.
C'est le seul mode de transfert thermique possible dans le ………….. c'est-à-dire entre le …………….. et la ………

a- Rayonnement et température :

Du fait de sa température T, tout corps émet un rayonnement électromagnétique, de flux thermique φ_E vérifiant la loi de Stefan-Boltzmann

$\varphi_E =$

φ_E en watt par mètre carré (W)
T en kelvin (K)
S en mètre carré (m²)

σ est la constante de Stefan-Boltzmann
Quelle est son unité ?

$\sigma = 5,67.10^{-8}$ ………

Remarque : Le flux thermique φ_E peut être défini comme une puissance : On parle alors d'une ………………………………………………

HISTOIRE DES SCIENCES

Le physicien et philosophe autrichien **Ludwig Boltzmann** (1844-1906) est l'un des pères fondateurs de la thermodynamique moderne. Il est l'auteur des principes de base concernant l'irréversibilité.

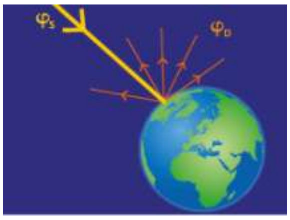
Exercice :

Le Soleil est de forme sphérique de rayon R = 6,96 × 10⁸ m, de surface S = ……… et de température de surface T_s = 5 778 K.
Calculer le flux thermique du Soleil:

2- Le cas de la terre : Albédo et effet de serre :

Après avoir atteind la terre et son atmosphère, une partie du rayonnement solaire $\varphi_{S-reçu/T}$, est réfléchi et diffusé vers l'espace : $\varphi_{diff/T}$. Le reste est absorbé par la terre (continents, océans, …) et par son atmosphère.
L'albédo noté A du système {Terre, atmosphère} permet de quantifier ce phénomène !

$A =$

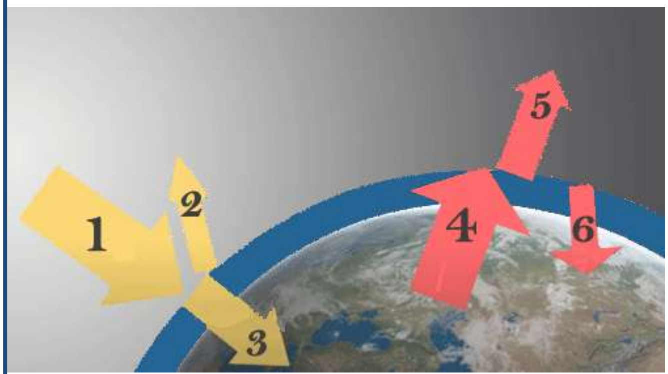


Quelques valeurs d'albédo :

- Mer : 0,05< A < 0,15
- Sable : 0,25 < A < 0,45

Forêt : 0,05 < A < 0,20
Neige : 0,8

Application : La fonte des pôles et les gaz à effet de serre dans l'atmosphère sont souvent utilisés pour expliquer le réchauffement climatique.
Pour comprendre ce phénomène, effectuons un bilan dit bilan radiatif sur le système {Terre ; atmosphère}. Il s'agit d'étudier les flux entrant et sortant du système.



1 : Une partie du flux thermique émis par le soleil est reçu par la terre. Il sera noté

2 : Une partie de ce flux est diffusé par l'atmosphère dans l'espace

A= donc $\varphi_{diff/T} =$

3 : L'autre partie $\varphi_{abs/T}$ est absorbée par la terre

$\boldsymbol{\varphi_{absorbé/T}} =$

donc $\boldsymbol{\varphi_{absorbé/T}} =$

4 : La Terre est un corps possédant une température T_T, celle-ci émet un flux thermique qui, d'après la loi de Stefan-Boltzmann, s'écrit

$\boldsymbol{\varphi_{émis/T}} =$

5 : Une partie de ce flux est renvoyé dans l'espace

6 :L'autre partie est absorbée par l'atmosphère puis une partie est renvoyé vers la terre et absorbée. C'est ce que l'on appelle l'effet de serre.

avec $\boldsymbol{\varphi'_{absorbé/T}} =$ avec α (alpha) = 0,75

Effectuons un bilan radiatif du système
La 1ère loi de la thermodynamique nous permet d'écrire que : $\Delta \boldsymbol{U} =$
Il n'y a pas de variation d'énergie interne du système car ……………………………………………………………..
Donc $\Delta \boldsymbol{U} =$

De plus, le système étant incompressible $\boldsymbol{W} = \mathbf{0}$

Donc Q = mais avec Q =
ou $Q_{reçu} - Q_{émis} = 0$

Donc

On parle **d'équilibre radiatif** :
La somme des flux reçus $Q_{reçu}$ est égale à la somme des flux émis $Q_{émis}$

Conclusion :

$T_T^4 =$

- La température T_T dépend bien sur de la température du soleil et donc du flux émis par celui-ci. ……………………………………………………..
……………………………………………………………………………………

- Si l'albédo A diminue alors (1- A) ……………… et T_T …………......
C'est le cas si les pôles ……………………………………… A_{neige} A_{sol}

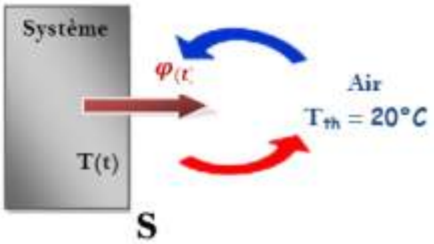
- Si α augmente alors le dénominateur diminue donc T_T ………………
C'est le cas lorsque ……………………………………………………………
…………………………………………………………………………………..

Calculez la température moyenne T_T sur Terre avec cette étude simplifiée.
A = 0,30 α = 0,75
Rayon de la Terre R_T =6400 km
et $\varphi_{S-reçu/T} = 1{,}8.10^{17} W$

3- Etude de transfert par convection : Loi de Newton

Question existentielle ?
Un café est servi à une température T_0 = 70°C. Au bout de combien de temps vais-je pouvoir le boire à une tempéraure de T=40°C si celui-ci est posé dans une salle à température T_{th} = 20°C ?

a- Modélisation du système et du milieu extérieur :



- Le système étudié est le système {tasse café} dont la température initiale est T_0 = 70°C

- Le système est immobile…….. et reste au repos macroscopique…

- Le transfert thermique $\varphi_{(t)}$ se fait du système (source chaude….) vers l'extérieur (source froide…..) par convection… et a lieu sur la surfaces.

A connaître
- Un thermostat est une objet dont la température reste constante
Ici le thermostat est l'air ambiant.

b- Loi de Newton :
Elle n'est pas à connaître par cœur, elle vous sera donnée.

$$\varphi_{(t)} = -h \times S \times [T(t) - T_{Th}]$$

Le flux thermique $\varphi_{(t)}$, échangé entre un système et un thermostat par convection, est proportionnel à la variation de température $\Delta T = T(t) - T_{Th}$

S correspond à la surface de contact. entre le système et le thermostat
h est un coefficient de surface / de proportionnalité
Le signe – traduit bien le fait que le système perd….. de l'énergie en se refroidissant.

c-Interprétation du phénomène :

- Le premier principe de la thermodynamique : $\Delta U =$ W + Q
  Le système étant incompressible alors $W =$ 0 et la variation d'énergie interne du système ΔU n'est dû qu'à un échange de chaleur $\Delta U =$ Q

- la variation d'énergie interne du système incompressible est proportionnelle à la variation de température
  $\Delta U = m \times c \times \Delta T = m\,c\,(T(t) - T_{th})$

- Le flux thermique entre le système et le thermostat est : $\varphi_{(t)} = \frac{Q}{\Delta t}$ (Ici le flux thermique est négatif….)

Combinons maintenant ces 3 relations et la loi de Newton afin d'écrire une équation traduisant le phénomène :

$\Delta U = Q$ et $\begin{cases} Q = \varphi(t) \times \Delta t \\ \Delta U = mc\Delta T \end{cases}$

donc $mc\Delta T = \varphi(t) \times \Delta t$

$\Rightarrow mc\dfrac{\Delta T}{\Delta t} = \varphi(t)$

Afin d'étudier l'évolution de la température T(t) en fonction du temps, nous n'allons pas prendre des grands intervalles de temps $\boldsymbol{\Delta t}$ mais des « petits » intervalles de temps **dt**

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta T}{\Delta t} = \dfrac{dT}{dt}$ c'est à dire la dérivée de T(t) par rapport au temps

Donc $mc\dfrac{dT}{dt} = \varphi(t)$

De plus $\varphi(t) = -hS(T(t) - T_{th})$

donc $mc\dfrac{dT}{dt} = -hS(T(t) - T_{th})$

$\Rightarrow \dfrac{dT}{dt} = -\dfrac{hS}{mc}(T(t) - T_{th})$

Posons $\tau = \dfrac{mc}{hS}$

donc $\dfrac{dT}{dt} = -\dfrac{1}{\tau}(T(t) - T_{th})$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\tau} \times T(t) + \frac{T_{th}}{\tau} \\ &\text{ou } \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau} \times T(t) = \frac{T_{th}}{\tau} \end{aligned}}$$

C'est une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficient constant et second membre

Qu'est qu'une équation différentielle du premier ordre ? C'est une relation qui relie une fonction (ici T(t)) et sa dérivée par rapport au temps.

d- Résolution de l'équation différentielle :

Identifions a et b

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} \times T(t) + \frac{T_{th}}{\tau}$$

ou

$$\frac{dT(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \times T(t) = \frac{T_{th}}{\tau}$$

Par identification, a = $-\dfrac{1}{\tau}$ et b = $\dfrac{T_{th}}{\tau}$

La solution est donc

$T(t) = A e^{-t/\tau} - \dfrac{T_{th}/\tau}{-1/\tau}$ $\rightarrow \dfrac{-b}{a}$

$\Rightarrow T(t) = A e^{-t/\tau} + T_{th}$

Mathématiquement

Une équation linéaire du premier ordre avec un second membre s'écrit

$y'(x) = ay + b$

$$y'(x) = a.y(x) + b$$

La solution est :

$$y(x) = C \times e^{a \times x} - b/a$$

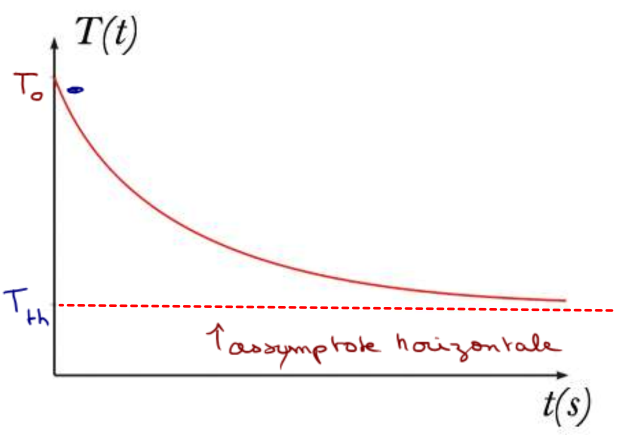
avec $B = -b/a$

e^x étant la fonction exponentielle

$e^0 =$ 1 et $\lim_{x\to\infty} e^x =$ $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} =$ 0

e- Interprétation de la courbe T(t)=f(t)



$T(t) = A e^{-t/\tau} + T_{th}$

à $t = 0$ $T(t=0) = T_0$

donc $A e^{-0/\tau} + T_{th} = T_0$

$\Rightarrow A = T_0 - T_{th}$

$\Rightarrow T(t) = (T_0 - T_{th}) e^{-t/\tau} + T_{th}$

De plus $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t) = T_{th}$ $\left\{ \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t/\tau} = 0 \right.$

A la fin, la tasse de café est à la température de l'air ambiant.

f- Réponse à la question ?

Question existentielle ?

Un café est servi à une température $T_0 = 70°C$. Au bout de combien de temps vais-je pouvoir le boire à une températaure de $T=40°C$ si celui-ci est posé dans une salle à température $T_{th} = 20°C$?

Soit t_1 la date à laquelle le système atteint la temperature $T = 40°C$

$$T(t_1) = (T_0 - T_{th})e^{-t_1/\tau} + T_{th} = T$$

Il faut isoler t_1

$$\Rightarrow e^{-t_1/\tau} = \frac{T - T_{th}}{T_0 - T_{th}}$$

$$\Rightarrow \ln\left(e^{-t_1/\tau}\right) = \ln\left(\frac{T - T_{th}}{T_0 - T_{th}}\right)$$

$$\Rightarrow -t_1/\tau = \ln\left(\frac{T - T_{th}}{T_0 - T_{th}}\right)$$

$$\Rightarrow t_1 = -\tau \ln\left(\frac{T - T_{th}}{T_0 - T_{th}}\right)$$

avec $\tau = \frac{mc}{hS}$

$$\Rightarrow t_1 = -\frac{520.10^{-3} \times 2,2.10^{3}}{10 \times 2,8.10^{-2}} \ln\left(\frac{60 - 20}{80 - 20}\right)$$

$$\Rightarrow t_1 = 4,5.10^{3}\,s \simeq 28\ min$$