

**COURS n°8 « Modèle du gaz parfait et le premier principe de la thermodynamique »****Les compétences à acquérir...**

- Énergie interne d'un système. Aspects microscopiques.
- Citer les différentes contributions microscopiques à l'énergie interne d'un système.
- Premier principe de la thermodynamique. Transfert thermique, travail.
- Prévoir le sens d'un transfert thermique. Distinguer, dans un bilan d'énergie, le terme correspondant à la variation de l'énergie du système des termes correspondant à des transferts d'énergie entre le système et l'extérieur.
- Capacité thermique d'un système incompressible. Énergie interne d'un système incompressible.
- Exploiter l'expression de la variation d'énergie interne d'un système incompressible en fonction de sa capacité thermique et de la variation de sa température pour effectuer un bilan énergétique.
- Effectuer l'étude énergétique d'un système thermodynamique.
- Modes de transfert thermique. Flux thermique. Résistance thermique.
- Bilan thermique du système Terre-atmosphère. Effet de serre.
- Loi phénoménologique de Newton, modélisation de l'évolution de la température d'un système au contact d'un thermostat.

**I- Gaz parfait**

1- Modèle du gaz parfait: Le **modèle du gaz parfait** est souvent utilisé pour prévoir le comportement de certains gaz lorsqu'on fait varier certains paramètres tels que la pression ou la température.

Ce modèle repose sur les deux hypothèses suivantes :

- Les entités n'ont pas d'interactions entre elles : on considère qu'elles sont suffisamment éloignées les une des autres et **qu'il n'existe pas de forces entre elles**.
- Les entités constituant le gaz ont un volume négligeable devant le volume de l'enceinte qui les contient : elles sont **assimilées à des points matériels**.

2- L'équation d'état du gaz parfait

Pour une quantité de matière n de gaz parfait, la pression P , la température T et le volume V vérifient la relation :

$$PV = nRT$$

P pression exprimée en **Pascal**....**Pa**

V volume exprimé en ...**m³**.....

T température exprimé en **Kelvin**....**K**

n quantité exprimée en ...**mol**.....

R constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

1,0 atm = 1,0 bar = $1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
1013 hPa = $1013 \cdot 10^2 \text{ Pa}$

$$T(K) = T(^{\circ}\text{C}) + 273,15$$

Exercices:

Calculer la quantité d'hélium n_{He} contenue dans une enceinte de volume $V = 5,0 \text{ L}$ dont la pression est $P_1 = 2,5 \text{ atm}$ et la température est $T_1 = 30^{\circ}\text{C}$

La quantité d'hélium est maintenant égale $n'_{\text{He}} = 1,00 \text{ mol}$, la pression est $P_2 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et la température est $T_2 = 25^{\circ}\text{C}$.

Calculer le volume V_2 occupé par ce gaz

Comment appelle-t-on ce volume ?

$$n'_{\text{He}} = 1 \text{ mol}, V_2 = V_m \text{ volume molâne}$$

Remarque :

Si la température du système gaz parfait reste **constante**... (..isotherme..), on retrouve **la loi de Boyle Mariotte**., l'équation d'état s'écrit $P \times V = \text{constante}$

Exercice : Un gaz est maintenu dans une seringue : la pression est de $P_3 = 1,0 \text{ bar}$ et le volume est de $V_3 = 3,0 \text{ cm}^3$

Le gaz est comprimé lentement (température constante) de façon obtenir une pression $P_4 = 2,5 \text{ bar}$ Quel est le nouveau volume V_4 ?

Calcul de m_{He}

$$P_1 V = m_{\text{He}} R T_1$$

$$\Rightarrow m_{\text{He}} = \frac{P_1 V}{R T_1} = \frac{2,5 \cdot 10^5 \times 5,0 \cdot 10^{-3}}{8,314 \times (30 + 273,15)}$$

$$= 0,50 \text{ mol}$$

Calcul de V_2

$$P_2 V_2 = m'_{\text{He}} R T_2$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{m'_{\text{He}} R T_2}{P_2}$$

$$= \frac{1,00 \times 8,314 \times (25 + 273,15)}{1,013 \cdot 10^5}$$

$$= 2,45 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 24,5 \text{ L}$$

Calcul de V_4

$$P_4 V_4 = P_3 V_3 = \text{constante}$$

$$\Rightarrow V_4 = \frac{P_3 V_3}{P_4} = \frac{1,0 \times 3,0}{2,5}$$

$$= 1,2 \text{ cm}^3$$

II- Introduction à la notion d'énergie interne U d'un système :

1- Une drôle d'expérience : Considérons comme système d'étude une marmite remplie d'eau {marmite + eau}

① Dans un premier temps, la marmite est posée sur une table et poussée par une main exerçant une force constante \vec{F}_{main} sur tout le trajet AB. Cette marmite remplie d'eau est mise en mouvement : Tant que elle reste sur la table, nous pouvons dire que l'énergie E_{tot} du système s'écrit :

$$E_{tot} = E_m = E_c + E_{pp}$$

avec $E_{pp} = 0$

Le théorème de l'énergie cinétique, nous permet d'écrire aussi que

On a donc une variation d'énergie totale $\Delta E_{tot} = E_c = \frac{1}{2} m v^2$

② Considérons maintenant que la marmite est lâchée d'une altitude z_c sans vitesse initiale.

La variation d'énergie totale ΔE_{tot} du système s'écrit :

$$\Delta E_{tot} = \Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_{pp} = 0 \text{ si chute libre}$$

③ La marmite est sur la table et posée sur un réchaud. L'eau bout.

La variation d'énergie totale du système s'écrit :

$$\Delta E_{tot} = \Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_{pp}$$

Le système est immobile

donc $\Delta E_c = 0$ et $\Delta E_{pp} = 0$



$$\Delta E_c = \sum W_{AB}(\vec{F}) = W_{AB}(\vec{F}) + W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R})$$

Il est nécessaire d'introduire une énergie interne moléculaire

2- Energie interne d'un système U :

L'énergie interne U d'un système correspond à sa propre énergie

Elle correspond à la somme des énergies qui existent à l'intérieur de ce système, au niveau microscopiques du fait de ses constituants (atomes, molécules, ions)

- Du fait de l'agitation thermique, chaque constituant possède une énergie cinétique

$$e_{ci} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Cette agitation augmente lors d'une augmentation de température

- Les énergies potentielles d'interaction sont liées aux interactions entre les constituants qui constituent le système.

Elles peuvent être des interactions intra et inter moléculaires

Nous définissons ainsi une énergie interne $U = \dots$

Il est quasiment impossible de mesurer toutes ces énergies, c'est pourquoi nous nous intéresserons à la variation d'énergie interne ΔU .

3- La variation d'énergie totale d'un système

La variation d'énergie totale ΔE_{tot} d'un système physique se décompose en :

- en une variation d'énergies, au niveau macroscopiques, (ΔE_m) : telle que $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_{pp}$

- en une variation d'énergie interne, au niveau microscopique, ΔU

ainsi la variation de l'énergie totale d'un système, en thermodynamique, est s'écrit :

$$\Delta E_{tot} = \Delta E_c + \Delta E_{pp} + \Delta U$$

Dans cette partie du programme enterminale, nous n'étudierons que des systèmes au repos à l'échelle macroscopique :

$$\Delta E_{tot} = \Delta U$$

Repos macroscopique

$$\Delta E_c = 0 \text{ et } \Delta E_{pp} = 0$$

III- Le premier principe de la thermodynamique :

1- Énoncé du principe:

Le **premier principe de la thermodynamique** énonce que la variation d'énergie interne ΔU d'un système, qui est au repos macroscopique $\Delta E_m = 0$, qui n'échange pas de matière avec l'extérieur (système fermé...) et qui évolue d'un état initial à un état final est égale à la somme des énergies échangées par le système avec l'extérieur, sous forme de travail W et / ou sous forme d'énergie thermique transférée Q ...

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = W + Q$$

- W travail exprimé en Joule J
- Q énergie thermique transférée exprimé en Joule J
- $\Delta U_{i \rightarrow f}$ variation d'énergie interne exprimée en Joule J



Remarque importante :

Par convention, W et Q sont comptés positif..... quand le système **reçoit** cette énergie et négatif..... quand il **cède** à l'extérieur.

2- Le travail W

Exercice :

Un gaz, dit compressible, est placé dans un cylindre, muni d'un piston mobile.

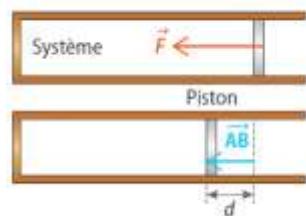
Une force pressante \vec{F} constante est exercée sur le piston

Le piston se déplace de d dans le sens de la diminution de volume du gaz.

Exprimer le travail reçu par le système {piston-gaz}

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F \times AB \times \cos(\vec{F}, \vec{AB}) = 0$$

Le travail W est reçu par le système. Il est donc positif...



Dans de nombreux exercices, le système sera dit incompressible.....

Ce qui entraîne que le travail $W = 0$

La variation d'énergie interne $\Delta U = W + Q$ ne sera due, dans ce cas de système incompressible, qu'à un transfert thermique :

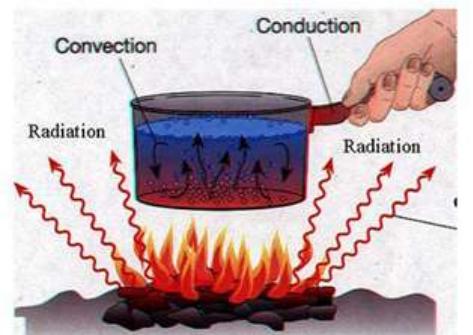
$$\Delta U = Q$$

IV- Les trois modes de transfert :

1- Mode de transfert :

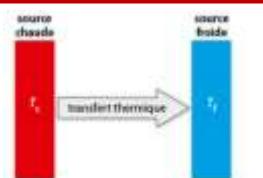
Un transfert thermique (la chaleur) peut se propager de 3 façons différentes

- Par convection..... (l'agitation thermique, l'agitation des molécules ou atomes se transmet de proche en proche dans la matière, mais sans transport global de matière ; ce mode de transfert a principalement lieu dans les solides) ;
- Par convection.....(l'agitation thermique se transmet de proche en proche dans la matière et avec déplacement d'ensemble de celle-ci) ; ce mode de transfert a lieu dans les fluides (liquides et gaz)
- Par rayonnement.....(l'absorption ou l'émission d'ondes électromagnétiques modifie l'agitation thermique) ; ce mode de transfert a lieu quel que soit l'état, et se fait même au travers du vide.



2- Sens de transfert thermique :

Le sens du transfert thermique ne peut se faire que d'un milieu qui a la température la plus élevée (la source chaude..) vers un milieu qui a la température la plus faible (la source froide..), jusqu'à ce que leurs températures soient égales



3- Définition flux thermique :

Les transferts thermiques entre 2 systèmes (Une source chaude T_C et une source froide T_F) ne sont pas instantanés, ils évoluent en fonction du temps.

On définit pour suivre cette évolution **le flux thermique Φ** qui caractérise la vitesse d'un transfert thermique entre 2 systèmes, c'est l'énergie échangé par unité de temps,

Le flux thermique Φ (phi) traduit la vitesse de transfert thermique

$$\Phi = \frac{Q}{\Delta t}$$

Φ en watt (W)

Δt en seconde (s)

Q en joule (J)

Le flux thermique correspond à une p u i s s a n c e ... t h e r m i q u e

Rappels :

$$P = \frac{E}{\Delta t}$$

E énergie en J

P puissance en W

Δt durée en s

V- Les exemples à connaître :

1- Cas n°1 d'un système fermé et incompressible :

Dans le cas d'un système fermé, incompressible et en l'absence de changement d'état, la variation d'énergie interne d'un système est **proportionnelle** à la variation de température

$$\Delta U = m \times c \times \Delta T$$

Avec $\Delta T = T_{\text{finale}} - T_{\text{initiale}}$

Si $C = m \times c$ alors

$$\Delta U = C \times \Delta T$$

m : masse en kilogramme (kg)

ΔT : variation de température avec T en kelvin (K)

Avec $T(K) = T(^{\circ}\text{C}) + 273,15$

Donc $\Delta T(K) = \Delta T(^{\circ}\text{C})$

ΔU : Variation d'énergie interne en joule (J)

c : capacité thermique massique en joule par kelvin par kilogramme ($\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$)

C : capacité thermique en joule par kelvin (J.K^{-1})

Remarque : Que signifie une capacité thermique massique de l'eau $c_{\text{eau}} = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$?

C'est l'énergie que il faut fournir à 1 kg d'eau pour éléver sa température de 1K

Exercice : Calculer la variation d'énergie interne ΔU de la marmite en fonte de masse $m_f = 10 \text{ kg}$ remplie d'un volume d'eau $V_{\text{eau}} = 150 \text{ mL}$ que l'on chauffe sans la « déplacer ». La température du système {marmite + eau} passe d'une température $T_i = 20^{\circ}\text{C}$ à une température $T_f = 95^{\circ}\text{C}$.

Données : capacité massique de l'eau et de la fonte : $c_{\text{eau}} = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et $C_{\text{fonte}} = 4,70 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

système {marmite, eau}

$$\Delta U = \Delta U_{\text{eau}} + \Delta U_{\text{marmille}}$$

$$= m_{\text{eau}} \times c_{\text{eau}} \times \Delta T + C_{\text{fonte}} \times \Delta T$$

$$\text{avec } \frac{m_{\text{eau}}}{V_{\text{eau}}} = \frac{m_{\text{eau}}}{V_{\text{eau}}} \Rightarrow m_{\text{eau}} = \frac{m_{\text{eau}}}{V_{\text{eau}}} \times V_{\text{eau}} \quad \Delta \text{ eau en kg}$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{m_{\text{eau}}}{V_{\text{eau}}} \times c_{\text{eau}} \times (T_f - T_i) + C_{\text{fonte}} \times (T_f - T_i)$$

$$\Rightarrow \Delta U = 1,0 \times 150 \cdot 10^{-3} \times 4,18 \cdot 10^3 \times (95 - 20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta T \\ = 95 + 273,15 \\ - (20 + 273,15) \\ = 95 - 20 \\ = 75 \text{ K} \end{array} \right.$$

$$+ 4,70 \cdot 10^3 \times (95 - 20)$$

$$= 4,0 \cdot 10^5 \text{ J}$$

2- Etude du flux thermique à travers une paroi plane :

Pour une paroi plane, dont deux faces sont à des températures différentes T_1 et T_2 , en fonction du matériau constituant la paroi, l'énergie Q est transférée plus ou moins rapidement de la source ... chaude vers la source ... froide

Définition de la résistance thermique :

La résistance thermique R_{th} d'un corps traduit sa capacité à au flux thermique.

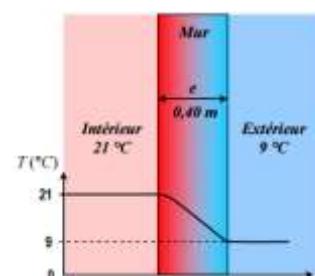
Pour une paroi plane dont les deux faces sont à la température T_C et T_F avec $T_C > T_F$, traversée par un flux thermique Φ , la résistance thermique R_{th} est définie par :

$$\Phi = \frac{T_C - T_F}{R_{\text{th}}}$$

Φ en W

T en K ou $^{\circ}\text{C}$

R_{th} en ... K...W...!



Pour une paroi plane, la résistance thermique dépend de son épaisseur e , sa surface S et de la conductivité thermique λ du matériau

Ainsi

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda \times S}$$

e en m
S en m^2
 λ en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
 R_{th} en $K \cdot W^{-1}$

Matériau	λ ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)
Air	0,026
Polystyrène	0,036
Bois	0,16
Béton	0,92
Verre	1,2
Acier	46
Aluminium	250
Cuivre	390

+ faible

On peut donc exprimer le flux thermique Φ de 2 façons :

$$\Phi = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{T_c - T_f}{R_{th}} \quad \text{Utile dans les exercices}$$

Remarques :

- Plus la résistance thermique est importante plus le flux thermique est ... *faible*
 - Un matériau possédant une résistance thermique élevée est un bon ... *isolant thermique*
 - Plus la conductivité thermique est faible plus le matériau est ... *un isolant* .. de chaleur
- Cas de l'air : $\lambda = 0,026 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \text{K}^{-1}$ est faible donc l'air est un bon isolant
- D'après le tableau précédent, le meilleur isolant est ... *l'air* (double ... *vêlage* ..)
 - Si plusieurs paroies sont superposées leurs résistances thermiques ... *s'ajoutent*

Exercice: La résistance thermique d'une vitre est $R_{th} = 5,0 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$; la température de la pièce est $T_c = 21^\circ\text{C}$, la température extérieure est $T_f = 9^\circ\text{C}$. Calculer le flux thermique et la chaleur perdue en 1h.

Calcul du flux Φ

$$\Phi = \frac{T_c - T_f}{R_{th}} = \frac{21 - 9}{5,0 \cdot 10^{-3}} = 2,4 \cdot 10^3 \text{ W}$$

Calcul de Q

$$Q = \Phi \times \Delta t = 2,4 \cdot 10^3 \times 1 \times 60 \times 60 = 8,7 \cdot 10^6 \text{ J}$$

2- Cas n°2 : Etude du bilan radiatif de la Terre : Transfert thermique par rayonnement

Le transfert thermique par **rayonnement** est l'échange de photons, par émission et absorption, entre deux corps. C'est le seul mode de transfert thermique possible dans le c'est-à-dire entre le et la

a- Rayonnement et température :

Du fait de sa température T , tout corps émet un **rayonnement électromagnétique**, de flux thermique φ_E vérifiant la loi de Stefan-Boltzmann

$$\varphi_E = \sigma \times S \times T^4$$

σ en watt par mètre carré (W)
 T en kelvin (K)
 S en mètre carré (m^2)

σ est la constante de Stefan-Boltzmann
Quelle est son unité ?

$$\sigma = \frac{\varphi_e - W}{m^2 \cdot S \cdot T^4 \cdot K}$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$$

On parle souvent de flux thermique sur facique

$$\frac{\varphi_e}{S} = \sigma \times T^4$$

HISTOIRE DES SCIENCES

Le physicien et philosophe autrichien **Ludwig Boltzmann** (1844-1906) est l'un des pères fondateurs de la thermodynamique moderne. Il est l'auteur des principes de base concernant l'irréversibilité.



Remarque : Le flux thermique φ_E peut être défini comme une puissance : On parle alors d'une ... *puissance thermique* P_{th-ray}

Exercice :

Le Soleil est de forme sphérique de rayon $R = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$, de surface $S = 4\pi R^2$ et de température de surface $T_s = 5778 \text{ K}$.

Calculer le flux thermique du Soleil :

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \sigma \times S \times T^4 \\ &= \sigma \times 4\pi R^2 \times T^4 \\ &= 5,67 \cdot 10^{-8} \times 4\pi (6,96 \cdot 10^8)^4 \times 5778^4 \end{aligned}$$

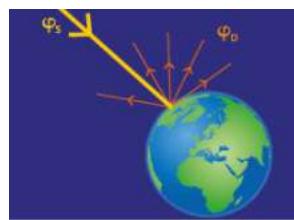
$$\varphi_s = 3,85 \cdot 10^{26} \text{ W} = P_s \text{ (puissance)}$$

La Terre ne reçoit pas tout ce flux mais qu'une partie $\varphi_{s-reçu/T}$

2- Le cas de la terre : Albédo et effet de serre :

Après avoir atteint la terre et son atmosphère, une partie du rayonnement solaire $\varphi_{S\text{-reçu}/T}$ est réfléchi et diffusé vers l'espace : $\varphi_{diff/T}$. Le reste est absorbé par la terre (continents, océans, ...) et par son atmosphère. L'albédo noté A du système {Terre, atmosphère} permet de quantifier ce phénomène !

$$A = \frac{\varphi_{diff/T}}{\varphi_{S\text{-reçu}/T}}$$



Quelques valeurs d'albédo :

- Mer : $0,05 < A < 0,15$
- Sable : $0,25 < A < 0,45$

Forêt : $0,05 < A < 0,20$

Neige : 0,8

C'est la neige qui réfléchit le plus les rayements du soleil

Application : La fonte des pôles et les gaz à effet de serre dans l'atmosphère sont souvent utilisés pour expliquer le réchauffement climatique.

Pour comprendre ce phénomène, effectuons un bilan dit bilan radiatif sur le système {Terre ; atmosphère}. Il s'agit d'étudier les flux entrant et sortant du système.



1 : Une partie du flux thermique émis par le soleil est reçu par la terre. Il sera noté $\varphi_{S\text{-reçu}/T}$

2 : Une partie de ce flux est diffusé par l'atmosphère dans l'espace

$$A = \frac{\varphi_{diff/T}}{\varphi_{S\text{-reçu}/T}} \quad \text{donc } \varphi_{diff/T} = A \times \varphi_{S\text{-reçu}/T}$$

3 : L'autre partie $\varphi_{abs/T}$ est absorbée par la terre

$$\varphi_{absorbé/T} = \varphi_{S\text{-reçu}/T} - \varphi_{diff/T}$$

$$\varphi_{absorbé/T} = \varphi_{S\text{-reçu}/T} (1 - A)$$

4 : La Terre est un corps possédant une température T_T , celle-ci émet un flux thermique qui, d'après la loi de Stefan-Boltzmann, s'écrit

$$\varphi_{émis/T} = \sigma \times S_T \times T_T^4$$

5 : Une partie de ce flux est renvoyé dans l'espace

6 : L'autre partie est absorbée par l'atmosphère puis une partie est renvoyé vers la terre et absorbée. C'est ce que l'on appelle l'effet de serre.

$$\text{avec } \varphi'_{absorbé/T} = \frac{\alpha}{2} \times \varphi_{émis/T} \quad \text{avec } \alpha \text{ (alpha)} = 0,75$$

Effectuons un bilan radiatif du système

La 1^{ère} loi de la thermodynamique nous permet d'écrire que : $\Delta U = W + Q$

Il n'y a pas de variation d'énergie interne du système car ... la température ... T_T ... est ... constante ...

$$\text{Donc } \Delta U = W + Q = 0$$

De plus, le système étant incompressible $W = 0 \Rightarrow \Delta U = 0 + Q = 0$

Donc $Q = 0$ mais avec $Q = Q_{\text{reçu}} - Q_{\text{émis}}$
ou $Q_{\text{reçu}} - Q_{\text{émis}} = 0$

Donc

$$\varphi_{absorbé/T} + \varphi'_{absorbé/T} - \varphi_{émis/T} = 0$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{6} - \textcircled{4} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_{émis/T} = \varphi_{absorbé/T} + \varphi'_{absorbé/T}$$

$$= (1 - A) \varphi_{S\text{-reçu}/T} + \frac{\alpha}{2} \varphi_{émis/T}$$

$$\Rightarrow \varphi_{émis/T} - \frac{\alpha}{2} \varphi_{émis/T} = (1 - A) \varphi_{S\text{-reçu}/T}$$

On parle d'équilibre radiatif :

La somme des flux reçus $Q_{\text{reçu}}$ est égale à la somme des flux émis $Q_{\text{émis}}$

$$\Rightarrow \varphi_{émis/T} (1 - \frac{\alpha}{2}) = (1 - A) \varphi_{S\text{-reçu}/T}$$

$$\Rightarrow \sigma \times S_T \times T^4 \times (1 - \frac{\alpha}{2}) = (1 - A) \varphi_{S\text{-reçu}/T}$$

Conclusion :

$$T_T^4 = \frac{(1 - A)}{S \times S_T (1 - \frac{d}{2})} \times \varphi_{S-reçu/T}$$

- La température T_T dépend bien sur de la température du soleil et donc du flux émis par celui-ci. *Pendant une forte activité solaire le flux solaire augmente*
- Si l'albédo A diminue alors $(1 - A)$ augmente et T_T augmente. C'est le cas si les pôles disparaissent.
 $A_{neige} > A_{sol}$ donc $A_{total} \downarrow$
- Si α augmente alors le dénominateur diminue donc T_T augmente. C'est le cas lorsque *la concentration des gaz à effet de serre augmente*.

Calculez la température moyenne T_T sur Terre avec cette étude simplifiée.

$$A = 0,30 \quad \alpha = 0,75$$

$$\text{Rayon de la Terre } R_T = 6400 \text{ km}$$

et $\varphi_{S-reçu/T} = 1,8 \cdot 10^{17} \text{ W}$

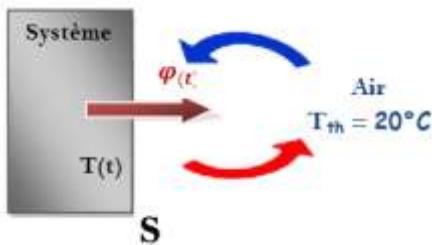
3- Etude de transfert par convection : Loi de Newton

Question existentielle ?

Un café est servi à une température $T_0 = 70^\circ\text{C}$. Au bout de combien de temps vais-je pouvoir le boire à une température de $T = 40^\circ\text{C}$ si celui-ci est posé dans une salle à température $T_{th} = 20^\circ\text{C}$?



a- Modélisation du système et du milieu extérieur :



A connaître

- Le système étudié est le système *{tasse café}* dont la température initiale est $T_0 = 70^\circ\text{C}$
- Le système est *immobile* et reste au repos *macroscopique*
- Le transfert thermique $\varphi(t)$ se fait du système (source *chaud*) vers l'extérieur (source *froide*) par *convection* et a lieu sur la *surface S*.
- Un *thermostat* est une objet dont la température reste *constante*. Ici le thermostat est *l'air ambiant*.

b- Loi de Newton :

Elle n'est pas à connaître par cœur, elle vous sera donnée.

Le flux thermique $\varphi(t)$, échangé entre un système et un thermostat par convection, est proportionnel à la variation de température $\Delta T = T(t) - T_{th}$

$$\varphi(t) = -h \times S \times [T(t) - T_{th}]$$

S correspond à la surface *de contact* entre le système et le thermostat
h est un coefficient de surface / de proportionnalité
Le signe - traduit bien le fait que le système *perd* de l'énergie en se refroidissant.

c-Interprétation du phénomène :

- Le premier principe de la thermodynamique : $\Delta U = W + Q$

Le système étant incompressible alors $W = 0$ et la variation d'énergie interne du système ΔU n'est dû qu'à un échange de chaleur $\Delta U = Q$

- la variation d'énergie interne du système incompressible est proportionnelle à la variation de température
 $\Delta U = m \times c \times \Delta T = m \cdot c \cdot (T(r) - T_{th})$

- Le flux thermique entre le système et le thermostat est : $\varphi(t) = \frac{Q}{\Delta T}$ (Ici le flux thermique est *méga*trif)

Combinons maintenant ces 3 relations et la loi de Newton afin d'écrire une équation traduisant le phénomène :

$$\Delta U = Q \text{ et } \begin{cases} Q = \varphi(t) \times \Delta t \\ \Delta U = mc \Delta T \end{cases}$$

donc $mc \Delta T = \varphi(t) \times \Delta t$
 $\Rightarrow mc \frac{\Delta T}{\Delta t} = \varphi(t)$

Afin d'étudier l'évolution de la température $T(t)$ en fonction du temps, nous n'allons pas prendre des grands intervalles de temps Δt mais des « petits » intervalles de temps dt

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{dT}{dt} \text{ c'est à dire la dérivée de } T(t) \text{ par rapport au temps}$$

Donc $mc \frac{dT}{dt} = \varphi(t)$

De plus $\varphi(t) = -hS(T(t) - T_{th})$

donc $mc \frac{dT}{dt} = -hS(T(t) - T_{th})$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{hS}{mc} (T(t) - T_{th})$$

Posons $\zeta = \frac{mc}{hS}$

donc $\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\zeta} (T(t) - T_{th})$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\zeta} \times T(t) + \frac{T_{th}}{\zeta}$$

ou $\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\zeta} \times T(t) = \frac{T_{th}}{\zeta}$

C'est une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre à coefficient constant et second membre

Qu'est qu'une équation différentielle du premier ordre ? C'est une relation qui relie une fonction (ici $T(t)$) et sa dérivée par rapport au temps.

d- Résolution de l'équation différentielle :

Identifions a et b

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\frac{1}{\zeta} \times T(t) + \frac{T_{th}}{\zeta}$$

ou

$$\frac{dT(t)}{dt} + \frac{1}{\zeta} \times T(t) = \frac{T_{th}}{\zeta}$$

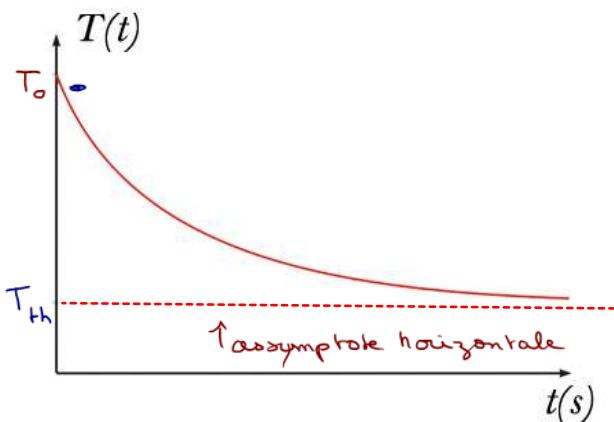
Par identification, $a = -\frac{1}{\zeta}$ et $b = \frac{T_{th}}{\zeta}$

La solution est donc

$$T(t) = A e^{-t/\zeta} - \frac{T_{th}/\zeta}{-1/\zeta} \rightarrow \frac{-b}{a}$$

$$\Rightarrow T(t) = A e^{-t/\zeta} + T_{th}$$

e- Interprétation de la courbe $T(t)=f(t)$



Mathématiquement

Une équation linéaire du premier ordre avec un second membre s'écrit

$$y'(x) = ay + b$$

$$y'(x) = a \cdot y(x) + b$$

La solution est :

$$y(x) = C \times e^{ax} - b/a$$

avec $B = -b/a$
 e^x étant la fonction exponentielle

$$e^0 = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$$T(t) = A e^{-t/\zeta} + T_{th}$$

à $t=0$ $T(t=0) = T_0$

donc $A e^{-0/\zeta} + T_{th} = T_0$

$$\Rightarrow A = T_0 - T_{th}$$

$$\Rightarrow T(t) = (T_0 - T_{th}) e^{-t/\zeta} + T_{th}$$

De plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = T_{th}$ $\left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t/\zeta} = 0 \right.$

A la fin, la tasse de café est à la température de l'air ambiant.

f- Réponse à la question ?

Question existentielle ?

Un café est servi à une température $T_0 = 70^\circ\text{C}$. Au bout de combien de temps vais-je pouvoir le boire à une température de $T=40^\circ\text{C}$ si celui-ci est posé dans une salle à température $T_{th} = 20^\circ\text{C}$?

Soit t_1 la date à laquelle le système atteint la température $T = 40^\circ\text{C}$

$$T(t_1) = (T_0 - T_{th}) e^{-t_1/\zeta} + T_{th} = T$$

Il faut isoler t_1

$$\Rightarrow e^{-t_1/\zeta} = \frac{T - T_{th}}{T_0 - T_{th}}$$

$$\Rightarrow \ln(e^{-t_1/\zeta}) = \ln\left(\frac{T - T_{th}}{T_0 - T_{th}}\right)$$

$$\Rightarrow -t_1/\zeta = \ln\left(\frac{T - T_{th}}{T_0 - T_{th}}\right)$$

$$\Rightarrow t_1 = -\zeta \ln\left(\frac{T - T_{th}}{T_0 - T_{th}}\right)$$

$$\text{avec } \zeta = \frac{mc}{hS}$$

$$\Rightarrow t_1 = -\frac{520 \cdot 10^{-3} \times 2,2 \cdot 10^3}{10 \times 2,8 \cdot 10^{-2}} \ln\left(\frac{60 - 20}{80 - 20}\right)$$

$$\Rightarrow t_1 = 4,5 \cdot 10^3 \text{ s} \approx 28 \text{ min}$$