Exercice 1 :

1 - Mode de transfert thermique : conduction, convection et rayonnement

2. Transfert thermique à travers la paroi : conduction

3 - Equation différentielle vérifiée par $T(t)$

Premier principe thermodynamique

$\Delta U = W + Q$ avec $W = 0$ car la bouteille est incompressible

$\Rightarrow \Delta U = Q$

La variation d'énergie interne ΔU s'écrit $\Delta U = C\,\Delta T$

et $Q = \phi \times \Delta t = hS \times (T_{ext} - T(t)) \times \Delta t$

donc $C\,\Delta T = hS\,(T_{ext} - T(t)) \times \Delta t$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta T}{\Delta t} = \dfrac{hS}{C}\,(T_{ext} - T(t))$ en posant $\tau = \dfrac{C}{hS}$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta T}{\Delta t} = \dfrac{1}{\tau} T_{ext} - \dfrac{1}{\tau} T(t)$

De plus $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\Delta T}{\Delta t} = \dfrac{dT}{dt}$; il vient $\dfrac{dT(t)}{dt} = -\dfrac{1}{\tau} \times T(t) + \dfrac{1}{\tau} \times T_{ext}$

$\Rightarrow \dfrac{dT(t)}{dt} = -\dfrac{1}{\tau}\left(T(t) - T_{ext}\right)$

4 : Expressions de A et B

La solution de cette équation différentielle est de la forme

$T(t) = A\,e^{-t/\tau} + B$

$\left\{ \dfrac{dT(t)}{dt} = \underbrace{-\dfrac{1}{\tau}}_{a} \times T(t) + \underbrace{\dfrac{1}{\tau} \times T_{ext}}_{b} \right.$

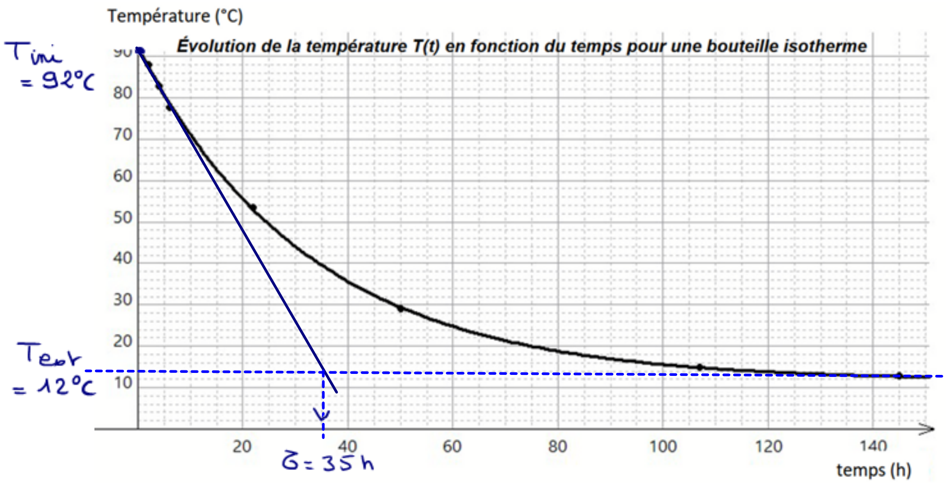
avec $B = \dfrac{-b}{a} = -\dfrac{T_{ext}/\tau}{-1/\tau} = T_{ext}$

de plus à $t = 0$ s $T(t=0) = T_{ini} \Rightarrow T(t=0) = A\,e^{-0/\tau} + T_{ext} = T_{ini}$

$\Rightarrow A + T_{ext} = T_{ini} \Rightarrow A = T_{ini} - T_{ext}$

5 - $T(t) = (T_{ini} - T_{ext})\,e^{-t/\tau} + T_{ext}$

6 - et 7 -



8 - Nouvelle bouteille : $\tau = 51{,}2\,h$; $T(t) = A e^{-t/\tau} + B$ avec $A = 78\,°C$ et $B = 10\,°C$

Calcul de la durée t necessaire pour que l'eau soit à 70 °C

$$T(t) = A e^{-t/\tau} + B$$

isolons t $\quad A\, e^{-t/\tau} = T(t) - B$

$$\Rightarrow e^{-t/\tau} = \frac{T(t) - B}{A} \Rightarrow \ln\left(e^{-t/\tau}\right) = \ln\left(\frac{T(t) - B}{A}\right)$$

$$\Rightarrow -t/\tau = \ln\left(\frac{T(t) - B}{A}\right)$$

$$\Rightarrow t = -\tau \ln\left(\frac{T(t) - B}{A}\right) = -51{,}2 \times \ln\left(\frac{70 - 10}{78}\right)$$

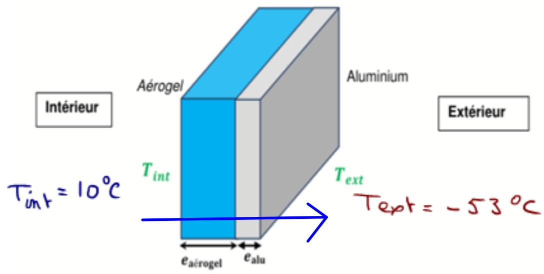
$$\Rightarrow t = 13\,h$$

Il faut donc 13 h pour que l'eau passe d'une température de 78 ° à 70

Donc $21\,h + 13^h = 21\,h + 3\,h + 10^h = 10\,h$ du matin

Exercice 2 :

1. Le flux thermique a toujours lieu de la source chaude vers la source froide :
De l'interieur T_{int} (10°C) vers l'exterieur T_{ext} (-53°C)



2. Le principal mode de transfert thermique, ici, est la conduction à travers la paroi.
Les 2 autres modes de transfert thermique sont la convection et les rayonnements

3. Calcul de la résistance thermique R_{th} à travers la pièce composée uniquement d'aluminium.

$$R_{th}(Alu) = \frac{e}{\lambda_{Alu} \times S} = \frac{e}{\lambda_{Alu} \times L \times \ell} = \frac{0{,}85 \cdot 10^{-2}}{237 \times 40 \cdot 10^{-2} \times 15 \cdot 10^{-2}}$$

$$= 6{,}0 \cdot 10^{-4}\ K \cdot W^{-1}$$

4. Calcul du flux ϕ_{Alu}

$$\phi_{Alu} = \frac{\Delta T}{R_{th}(Alu)} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{th}(Alu)} = \frac{10 - (-53)}{6{,}0 \cdot 10^{-4}} = 1{,}1 \cdot 10^{5}\ W$$

5. Calcul de la résistance thermique $R_{th}(aero)$ seul :

$$R_{th}(aéro) = \frac{e_{aéro}}{\lambda_{aéro} \times S} = \frac{3{,}5 \cdot 10^{-2}}{0{,}0015 \times 40 \cdot 10^{-2} \times 15 \cdot 10^{-2}}$$

$$= 3{,}9 \cdot 10^{2}\ K \cdot W^{-1}$$

L'aérogel étant posé contre l'aluminium, les résistances s'ajoutent

$$R_{th}(ensemble) = R_{th}(Alu) + R_{th}(aéro)$$

$$= 6{,}0 \cdot 10^{-4} + 3{,}9 \cdot 10^{2} = 3{,}9 \cdot 10^{2}\ K \cdot W^{-1}$$

6. Calcul du flux thermique $\phi_{(ensemble)}$

$$\phi_{(ensemble)} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{th}(ensemble)}$$

$$= \frac{10 - (-53)}{3{,}9.10^2} = 0{,}16 \text{ W}$$

Comparons les 2 flux

$$\frac{\phi_{Alu}}{\phi_{(ensemble)}} = \frac{1{,}1.10^5}{0{,}16} = 6{,}9.10^5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \phi_{Alu} = 6{,}9.10^5 \times \phi_{(ensemble)}$. Le flux thermique avec l'aluminium seul est environ 690000 fois plus élevé qu'avec l'aérogel. D'où l'intérêt d'isoler.

7. On a

$$\phi = \frac{\Delta T}{R_{th}} = \frac{\Delta T}{e/\lambda \times S} \Rightarrow \phi = \frac{\Delta T \times \lambda \times S}{e}$$

Donc : - si la surface S est doublée alors le flux ϕ est doublé

- Si l'épaisseur e est doublée alors le flux ϕ est divisé par 2.